习　题　5.4　函数的 Taylor 公式及其应用

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式（展开到指定的 n 次）：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$，$n=4$；　　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$，$n=4$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$，$n=3$；　　(4) $f(x)=e^{\sin x}$，$n=4$；

(5) $f(x)=\tan x$，$n=5$；　　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$，$n=6$；

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，$n=4$　　(8) $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$n=4$

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，$n=3$.

解（1） $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$=1+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}(-x)+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 2\end{pmatrix}(-x)^2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 3\end{pmatrix}(-x)^3+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 4\end{pmatrix}(-x)^4+\circ(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{4}{2\cdot 9}x^2+\frac{28}{6\cdot 27}x^3+\frac{280}{24\cdot 81}x^4+\circ(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4+\circ(x^4)\text{。}$$

（2） $f(x)=\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$

$$=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4))\cos\alpha-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\frac{\cos\alpha}{2!}x^2+\frac{\sin\alpha}{3!}x^3+\frac{\cos\alpha}{4!}x^4+o(x^4)\text{。}$$

（3） $f(x)=\sqrt{2+\sin x}=\sqrt{2(1+\dfrac{\sin x}{2})}=\sqrt{2}[1+\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3))]^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3]$$

$$=\sqrt{2}[1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}+o(x^3)]=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{13\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3)。$$

(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)。$$

(5) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))^{-1}$$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5))(1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24})^2+o(x^5))$$

$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+(x-\frac{x^3}{6})\frac{x^2}{2}+x\cdot\frac{5x^4}{24}+o(x^5)$$

$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)。$$

(6) $f(x)=\ln(\cos x)=\ln(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o(x^6))$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2})^3+o(x^6)$$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24})-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{8}+o(x^6)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)。$$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$=[1+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))]^{-1}$$

$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24})^2-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})^3+(\frac{x}{2})^4+o(x^4)$$

$$=1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120})+(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72})-(\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8})+\frac{x^4}{16}+o(x^4)$$

$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$。

（8） $f(x)=\ln(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4))=(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{6})^2+o(x^4)$

$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4)$。

（9） $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}=[1+(-2x+x^3)]^{\frac{1}{2}}-[1+(-3x+x^2)]^{\frac{1}{3}}$

$=[1+\frac{1}{2}(-2x+x^3)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3+o(x^3)]$

$-[1+\frac{1}{3}(-3x+x^2)-\frac{1}{9}(-3x+x^2)^2+\frac{5}{81}(-3x)^3+o(x^3)]$

$=(1-x-\frac{1}{2}x^2)-(1-x-\frac{2}{3}x^2-x^3)+o(x^3)$

$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$。

2. 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式：

（1） $f(x)=-2x^3+3x^2-2$， $x_0=1$　　（2） $f(x)=\ln x$， $x_0=\mathrm{e}$；

（3） $f(x)=\ln x$；$x_0=1$　　（4） $f(x)=\sin x$， $x_0=\frac{\pi}{6}$；

（5） $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=2$.

解（1） $f(x)=-2x^3+3x^2-2=-2[(x-1)+1]^3+3[(x-1)+1]^2-2$

$=[-2(x-1)^3-6(x-1)^2-6(x-1)-2]+[3(x-1)^2+6(x-1)+3]-2$

$=-1-3(x-1)^2-2(x-1)^3$。

（2） $f(x)=\ln x=\ln[(x-e)+e]=\ln e+\ln(1+\frac{x-e}{e})$

$=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n+\circ\left((x-e)^n\right)$。

（3） $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$

$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\circ\left((x-1)^n\right)$。

（4） $f(x)=\sin x$， $f^{(n)}(x_0)=\sin(x_0+\frac{n\pi}{2})$，

$$f(x)=f(\frac{\pi}{6})+f'(\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})+\frac{f''(\frac{\pi}{6})}{2!}(x-\frac{\pi}{6})^2+\frac{f'''(\frac{\pi}{6})}{3!}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{6})}{n!}(x-\frac{\pi}{6})^n+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots+\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^n$$

$$+o\left((x-\frac{\pi}{6})^n\right)。$$

（5） $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x-2}{2}}$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n$$

$$+\circ\left((x-2)^n\right)。$$

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因。

解　利用第一个展开式计算时是用 $x=\frac{1}{3}$ 代入，利用第二个展开式计算时是用 $x=1$ 代入，显然第一个展开式的通项（或余项）趋于零的速度快，而第二个展开式的通项（或余项）趋于零的速度相对较慢，所以在指定精度的条件下，利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式计算量小，效果好。

另外可以通过比较两者的误差来说明两种方法的优劣：

由

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}},$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}},$$

可知利用第一个展开式计算前n项之和，余项为

$r_{2n}(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}[\dfrac{1}{(1+\xi_1)^{2n+1}}+\dfrac{1}{(1-\xi_2)^{2n+1}}]$，其中$\xi_1,\xi_2$位于$0$与$x$之间。

取$x=\dfrac{1}{3}$，$\left|r_{2n}(\dfrac{1}{3})\right|\le\dfrac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}[1+\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3})^{2n+1}}]<\dfrac{1}{(2n+1)2^{2n}}$。

而利用第二个展开式计算前n项之和，余项为

$r_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，其中$\xi$位于$0$与$x$之间，

取$x=1$， $|r_n(1)|>\dfrac{1^{n+1}}{(n+1)(1+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$。

显然$\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}>\dfrac{1}{(2n+1)2^{2n}}$，所以利用第一个展开式计算$\ln 2$的值比利用第二个展开式误差小，精度高。

4. 利用上题的讨论结果，不加计算，判别用哪个公式计算π的近似值效果更好，为什么？

(1) $$\frac{\pi}{4}=\arctan 1\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=1}$$

(2) $$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$ （Machin 公式）

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{239}}$$

解 两个计算π的公式都是利用了$\arctan x$的 Taylor 公式，但第一个公

式是用$x=1$代入，而第二个公式是用$x=\frac{1}{5}$与$x=\frac{1}{239}$代入。由于$\frac{1}{5}$与$\frac{1}{239}$比1小得多，因此第二个公式的通项（或余项）比第一个公式的通项（或余项）趋于零的速度快得多，所以用第二个公式计算π的近似值效果更好。

5. 利用 Taylor 公式求近似值（精确到10^{-4}）：

(1) $\lg 11$； (2) $\sqrt[3]{e}$； (3) $\sin 31^{\circ}$；

(4) $\cos 89^{\circ}$； (5) $\sqrt[5]{250}$； (6) $(1.1)^{1.2}$.

解（1） $\lg(10+x)=\dfrac{\ln(10+x)}{\ln 10}=1+\dfrac{1}{\ln 10}\ln(1+\dfrac{x}{10})=1+\dfrac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k10^k}+r_n(x)$，

其中$r_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，$\xi$位于0与$\dfrac{x}{10}$之间。

由$|r_n(1)|=\dfrac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\dfrac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)}$，得到$|r_4(1)|<0.89\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\lg 11\approx 1+\frac{1}{\ln 10}(\frac{1}{10}-\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}-\frac{1}{4\cdot 10^4})\approx 1.04139。$$

（2） $e^x=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}x^k+r_n(x)$，其中$r_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$位于0与$x$之间。

令$x=\dfrac{1}{3}$，$n=4$，$|r_4(\dfrac{1}{3})|\le\dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{5!3^5}\approx 0.27\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 27}+\frac{1}{24\cdot 81}\approx 1.39561。$$

（3） $\sin(\dfrac{\pi}{6}+x)=\sin(\dfrac{\pi}{6})+\cos(\dfrac{\pi}{6})x-\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{6})x^2+r_2(x)$，

其中$r_2(x)=-\dfrac{x^3}{3!}\cos(\dfrac{\pi}{6}+\xi)$，$\xi$位于0与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le\frac{\pi^3}{3!180^3}\approx 0.88\times10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\sin 31^\circ=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180})=\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})\frac{\pi}{180}-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{180})^2\approx 0.51504\text{。}$$

（4） $\sin x=x+r_2(x)$，其中$r_2(x)=-\frac{x^3}{3!}\cos\xi$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{\pi}{180})|\le 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\cos 89^\circ=\sin 1^\circ=\sin(\frac{\pi}{180})\approx\frac{\pi}{180}\approx 0.01745\text{。}$$

（5） $f(x)=3(1+x)^{\frac{1}{5}}=3(1+\frac{1}{5}x-\frac{4}{25\cdot 2}x^2)+r_2(x)$，

其中$r_2(x)=\dfrac{18}{125(1+\xi)^{\frac{14}{5}}}x^3$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_2(\frac{7}{243})|<\frac{18}{125}(\frac{7}{243})^3\approx 0.34\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(\frac{7}{243})=3(1+\frac{7}{243})^{\frac{1}{5}}=250^{\frac{1}{5}}\approx 3(1+\frac{7}{5\cdot 243}-\frac{4\cdot 7^2}{25\cdot 2\cdot 243^2})\approx 3.01708\text{。}$$

（6） $f(x)=(1+x)^{1.2}=1+1.2x+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}x^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}x^3+r_3(x)$，

其中$r_3(x)=\dfrac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8\cdot 1.8}{24(1+\xi)^{2.8}}x^4$，$\xi$位于$0$与$x$之间。

由于$|r_3(0.1)|\le 0.0144(0.1)^4=0.144\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(0.1)=(1.1)^{1.2}=1+1.2\cdot 0.1+\frac{1.2\cdot 0.2}{2}0.1^2-\frac{1.2\cdot 0.2\cdot 0.8}{6}0.1^3\approx 1.12117\text{。}$$

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\csc x\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解（1） $e^x\sin x-x(1+x)=(1+x+\dfrac{x^2}{2})(x-\dfrac{x^3}{6})+o(x^3)-(x+x^2)=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（2） $a^x+a^{-x}-2=(e^{x\ln a}-1)+(e^{-x\ln a}-1)$

$=(\ln a\cdot x+\dfrac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))+(-\ln a\cdot x+\dfrac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2))=\ln^2 a\cdot x^2+o(x^2)$，

所以

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a。$$

（3）由于$\sin x=x+o(x^2)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0。$$

（4）令$u=\dfrac{1}{x}$，由于

$(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}=(1+\dfrac{1}{5}u-\dfrac{2}{25}u^2+o(u^2))-(1-\dfrac{1}{5}u-\dfrac{2}{25}u^2+o(u^2))=\dfrac{2}{5}u+o(u^2)$，

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})=\lim_{u\to 0+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}}{u}=\frac{2}{5}。$$

（5）令$u=\dfrac{1}{x}$，由于$\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{u\to 0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}u^2+o(u^2)}{u^2}=\frac{1}{2}。$$

（6）由于 $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}。$$

（7）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$$\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2=(\sqrt{1+u}-1)+(\sqrt{1-u}-1)$$

$$=(\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))+(-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2))=-\frac{u^2}{4}+o(u^2)，$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})=\lim_{u\to 0+}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2}{u^2}=-\frac{1}{4}。$$

（8）令 $u=\frac{1}{x}$，由于

$$e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}=(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6})(1-u+\frac{u^2}{2})-1+o(u^3)=\frac{u^3}{6}+o(u^3)，$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]=\lim_{u\to 0+}\frac{e^u(1-u+\frac{u^2}{2})-\sqrt{1-u^6}}{u^3}=\frac{1}{6}。$$

7． 利用 Taylor 公式证明不等式：

（1） $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$， $x>0$；

（2） $(1+x)^\alpha<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$， $1<\alpha<2,\ x>0$。

证（1）利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2},\quad 0<\xi<x，$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}，\quad 0<\xi<x。$$

（2） $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$， $0<\xi<x$。

由于$1<\alpha<2$ ，所以$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)<0$，从而 Lagrange 余项$\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$

小于零，于是得到

$$(1+x)^\alpha<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2。$$

8．判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线，若存在的话求出渐近线方程：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$;　　(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;　　(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(7) $y=x+\operatorname{arccot}x$;　　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(10) $y=x^5\left(\cos\dfrac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$;

(11) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$;　　(12) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

解 （1）由于$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{1+x}=\infty$，所以$x=-1$是垂直渐近线；由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1，\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1，$$

所以斜渐近线为$y=x-1$。

（2）由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=0$，所以$y=0$是水平渐近线。

（3）解法一：由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=\sqrt{6}\text{，}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{，}$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=-\sqrt{6}\text{，}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\text{，}$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

解法二：

$$\sqrt{6x^2-8x+3}-ax-b=\frac{6x^2-8x+3-(ax+b)^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}=\frac{(6-a^2)x^2-(8+2ab)x+3-b^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}\text{，}$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax-b)=0$ ，解得 $a=\pm\sqrt{6},b=-\dfrac{4}{a}$。所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

（4）由于 $\lim\limits_{x\to0+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ ，所以 $x=0$ 是垂直渐近线；令 $u=\dfrac{1}{x}$，由

$$\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(2u+1)\,\mathrm{e}^u-a-bu}{u}=\lim_{u\to0}\frac{(1-a)+(3-b)u+o(u)}{u}=0\text{，}$$

解得 $a=1,b=3$ ，所以斜渐近线为 $y=x+3$。

（5）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2x}=\infty$，所以曲线无渐近线。

（6）函数定义域为 $(-1,1)$，且 $\lim\limits_{x\to1-}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=+\infty$ ，$\lim\limits_{x\to-1+}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\infty$，所以 $x=\pm1$ 为两条垂直渐近线。

（7）由于

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0，$$

所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=x$ ；

由于

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi，$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，渐近线为 $y=x+\pi$。

（8）令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}-ax-b]=\lim_{u\to 0}\frac{(1-2u)^{\frac{1}{3}}(1+u)^{\frac{2}{3}}-a-bu}{u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1-\frac{2}{3}u)(1+\frac{2}{3}u)-a-bu+o(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{1-a-bu+o(u)}{u}=0，$$

解出 $a=1,b=0$，所以曲线有渐近线 $y=x$。

（9）由于

$$\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\arccos(-1)=\pi，$$

所以曲线有水平渐近线 $y=\pi$。

（10）令 $u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(\cos\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-e^{-\frac{u^2}{2}}-au^4-bu^5}{u^5}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24})-(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2\cdot 4})-au^4-bu^5+o(u^5)}{u^5}=0，$$

解出 $a=-\dfrac{1}{12},b=0$，所以曲线有渐近线 $y=-\dfrac{1}{12}x$。

（11）由于

$$\lim_{x\to 0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=+\infty，$$

所以$x=0$是一条垂直渐近线。

令$u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)-ax-b\right]=\lim_{u\to 0}\frac{e^{\frac{u}{3}}-(1+u)^{\frac{1}{3}}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{2\cdot 9}+\frac{u^3}{6\cdot 27})-(1+\frac{u}{3}-\frac{2u^2}{2\cdot 9}+\frac{10u^3}{6\cdot 27})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\frac{1}{6}-a)u^2+(-\frac{1}{18}-b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出$a=\dfrac{1}{6}, b=-\dfrac{1}{18}$，所以斜渐近线为$y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{18}$。

（12）由于

$$\lim_{x\to 0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)=+\infty,$$

所以$x=0$是一条垂直渐近线。

令$u=\dfrac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)-ax-b\right]==\lim_{u\to 0+}\frac{e^{\frac{u}{2}}-\sqrt{1+u}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^3}{6\cdot 8})-(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{3u^3}{6\cdot 8})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(\frac{1}{4}-a)u^2-(\frac{1}{24}+b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出$a=\dfrac{1}{4}, b=-\dfrac{1}{24}$，所以当$x\to+\infty$时，渐近线为$y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{24}$。

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{2x}}+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)=\infty,$$

所以当$x\to-\infty$时，没有渐近线。

9．(1) 设$0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$， $x_{n+1}=\sin x_n$ （$n=1,2,\cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；　　　　　　　(ii) $x_n^2 \sim \dfrac{3}{n} \quad (n\to\infty)$。

⑵　设 $y_1 > 0$， $y_{n+1} = \ln(1+y_n)$ （$n = 1, 2, \cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$；　　　　　　　(ii) $y_n \sim \dfrac{2}{n} \quad (n\to\infty)$。

证（1）易知数列$\{x_n\}$单调减少且有下界。设其极限为a，对$x_{n+1} = \sin x_n$两端取极限，有$a = \sin a \quad (0 \le a < \dfrac{\pi}{2})$，所以$a = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - \sin^2 x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2 - [x_{n-1}^2 - \frac{1}{3}x_{n-1}^4 + o(x_{n-1}^4)]} = 3,$$

所以

$$x_n^2 \sim \frac{3}{n} \quad (n\to\infty)。$$

（2）易知数列$\{y_n\}$单调减少且有下界。设其极限为b，对$y_{n+1} = \ln(1+y_n)$两端取极限，有$b = \ln(1+b) \quad (0 \le b < y_1)$，所以$b = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$。

利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}\ln(1+y_{n-1})}{y_{n-1} - \ln(1+y_{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}^2}{y_{n-1} - [y_{n-1} - \frac{1}{2}y_{n-1}^2 + o(y_{n-1}^2)]} = 2,$$

所以

$$y_n \sim \frac{2}{n} \quad (n\to\infty)。$$

10．设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f''(x)| \le 1$， $f(x)$在区间$(0,1)$内取到最大值$\dfrac{1}{4}$。证明：$|f(0)| + |f(1)| \le 1$。

证　设$x_0 \in (0,1)$为函数的最大值点，则$f(x_0) = \dfrac{1}{4}$，$f'(x_0) = 0$。以$x = 0, x = 1$代入$f(x)$在点x_0的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2, \quad \xi \in (0, x_0),$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2, \quad \eta \in (x_0, 1),$$

得到

$$|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2] \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

11．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且在$[0,1]$上成立

$$|f(x)|\le 1，\quad |f''(x)|\le 2。$$

证明在$[0,1]$上成立$|f'(x)|\le 3$。

证 利用例 5.4.13，由于 $A=1, B=2$，所以在$[0,1]$上成立

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{1}{2}B=3。$$

12．设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$。

证明：

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

证 设 $x_0\in(0,1)$ 为函数的最小值点，则 $f(x_0)=-1$，$f'(x_0)=0$。以 $x=0, x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^{\ 2}=0,\quad \xi\in(0,x_0)，$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=0,\ \eta\in(x_0,1)\ ，$$

得到

$$\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^{\ 2}=\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=1。$$

当 $x_0\le\frac{1}{2}$ 时， $f''(\xi)=\frac{2}{x_0^{\ 2}}\ge 8$ ；当 $x_0>\frac{1}{2}$ 时， $f''(\eta)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8$。所以

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8。$$

13．设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导， $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

证 设$|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，若 $x_0=a$ 或 b，则结论自然成立。设 $a<x_0<b$，以 $x=a$ 和 $x=b$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2\quad \xi\in(a,x_0)，$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(b-x_0)^2\quad \eta\in(x_0,b)，$$

将 $f(a)=f(b)=0$， $f'(x_0)=0$ 代入上面两式，得到

$$|f(x_0)|\le\frac{1}{2}(a-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|,\quad |f(x_0)|\le\frac{1}{2}(b-x_0)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

当 $x_0\in(a,\frac{a+b}{2})$ 时， $(a-x_0)^2<\frac{1}{4}(b-a)^2$ ；

当 $x_0\in[\frac{a+b}{2},b)$ 时， $(b-x_0)^2\le\frac{1}{4}(b-a)^2$。

综合上述两种情况，得到

$$|f(x_0)|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$