习 题 9.3 正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$；　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；　(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(15) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$；　(16) $\sum_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\frac{\pi}{n})$；

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$。

解（1）因为 $\frac{4n}{n^4+1}\sim\frac{4}{n^3}\ (n\to\infty)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$ 收敛。

（2）因为 $\frac{2n^2}{n^3+3n}\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$ 发散。

（3）因为 $\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散。

（4）因为当 $n\ge 4$ 有 $\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛。

（5）因为 $\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 收敛。

（6）
$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}\ (n\to\infty),$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛。

（7）由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$发散。

（8）因为当$n\geq 3$有

$$\sqrt[n]{n}-1>e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty),$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$发散。

（9）设$x_n=\dfrac{n^2}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1,$$

由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$收敛。

（10）设$x_n=\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{3}{4}<1,$$

由 Cauchy 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$收敛。

（11）设$x_n=n^2e^{-n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{e}<1,$$

由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\,\mathrm{e}^{-n}$ 收敛。

（12）设$x_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{e}<1,$$

由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$收敛。

（13） $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\dfrac{1}{n}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$发散。

（14） $2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2\left(n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}\right)}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\frac{2}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{1}{n^2+\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}}\sim\frac{1}{4n^3}\ (n\to\infty)，$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$收敛。

（15） $\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2-1}\right)\sim\dfrac{2}{n^2}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$收敛。

（16） $-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\right]=-\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}\right)\sim\dfrac{\pi^2}{2n^2}\ (n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-\ln\cos\dfrac{\pi}{n})$收敛。

（17）设$x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a & 0<a<1\\ \dfrac{1}{2} & a=1\\ 0 & a>1\end{cases}，$$

由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$收敛。

2. 利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

证 （1）设$x_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$，由 D’Alembert

判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$。

（2）设$x_n = \dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}} = 0$，由 D’Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}} = 0$。

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ $(a>0)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{\ln n}}$；　　　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

解 (1) 设$x_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = a,$$

由 Raabe 判别法，

当$a>1$时，级数收敛，当$0<a<1$时，级数发散；

当$a=1$，$x_n = \dfrac{1}{n+1}$，级数发散。

(2) 设$x_n = \dfrac{1}{3^{\ln n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ln 3 > 1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。

(3) 设$x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ln 2 < 1,$$

由 Raabe 判别法，级数发散。

4. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{2n\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$。

解 (1) 当 $n\geq 2$，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{2x}dx<\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) $$\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx>\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{8n\pi},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n\pi}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 发散。

(3) $$\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)dx<\int_0^{\frac{1}{n}}xdx=\frac{1}{2n^2},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ — 见例 2.4.8)。

证 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<0,$$

$$x_n>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}>0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，因此收敛。

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ 0 或+∞，请问这两个级数的敛散性关系如何?

解 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,则当 n 充分大时有 $x_n<y_n$,所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 必定收敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 必定发散；

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$，则当$n$充分大时有$x_n>y_n$，所以当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$必定发散，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$必定收敛。

7. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$也收敛；反之如何?

解 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，所以当$n$充分大时有$0\le x_n<1$，即有$x_n^2\le x_n$，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛；反之，当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$不一定收敛，例如$x_n=\dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

8. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$收敛；又问当$0<p\le\dfrac{1}{2}$时，结论是否仍然成立?

解 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。当$p>\dfrac{1}{2}$时，由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

以及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$的收敛性，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$收敛。

当$0<p\le\dfrac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$不一定收敛。例如$x_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$发散。

9．设$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

（1）证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$收敛，并求其和；

（2）进一步设$f(x)$在$[1,+\infty)$上二阶可导，且$f''(x)<0$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛。

证 (1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$的部分和为$S_n=f(n+1)-f(1)$，由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$得到$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A-f(1)$；

(2) 由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少，得到

$$0 \le f'(n) < f'(\xi) = f(n) - f(n-1)，$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty}[f(n) - f(n-1)]$ 收敛，即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

10．设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$， $n = 1,2,\cdots$。

（1）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的和；

（2）设 $\lambda > 0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

证 （1） $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d\tan x = \frac{1}{n+1}$，

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1；$$

（2）由 $a_n > 0$ 及 $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$，可知 $a_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$，于是 $\frac{a_n}{n^{\lambda}} < \frac{1}{n^{1+\lambda}}$，

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

11. 设 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

证 由 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 - \frac{1}{n}$，得到

$$(n-1)x_n < nx_{n+1}，$$

即数列 $\{nx_{n+1}\}$ 单调增加。于是存在 $\alpha > 0$，使得 $nx_{n+1} \ge \alpha$，因而

$$x_{n+1} > \frac{\alpha}{n}。$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n}$ 发散即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

12．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散（$x_n > 0$， $n = 1,2,\cdots$），证明必存在发散的正

项级数$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，使得$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$。

证 设$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$，则$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$。令

$$y_1=\sqrt{S_1}, \quad y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}} \qquad (n=2,3,4,\cdots),$$

于是$\sum_{k=1}^{n} y_k=\sqrt{S_n}$，即$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$是发散的正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0。$$

13. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$发散，$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛。

证 由$S_n\ge S_{n-1}$，可知

$$\frac{x_n}{{S_n}^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},$$

由此得到$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{S_k^2}=\frac{2}{x_1}-\frac{1}{S_n}$。由$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}=\frac{2}{x_1}。$$

14．设$\{a_n\}$为 Fibonacci 数列。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$收敛，并求其和。

解 首先 Fibonacci 数列具有性质$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$与$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$

(见例 2.4.4)。设$x_n=\frac{a_n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}<1,$$

由 D’Alembert 判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$收敛。

设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$，则$2S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}$，两式相加得到

$$3S = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{2^n} = 4S - a_1 - a_2 \text{，}$$

于是

$$S = a_1 + a_2 = 2 \text{。}$$