习题 16.2　Fourier 级数的收敛判别法

1．设$\psi(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px dx=0 .$$

证　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在$N>0$，使得当$x\ge N$时，$|\psi(x)|<1$。利用积分第二中值定理可得

$$\left|\int_N^A\psi(x)\sin px\,dx\right|=\left|\psi(N)\int_N^{\xi}\sin px\,dx+\psi(A)\int_{\xi}^{A}\sin px\,dx\right|$$

$$<\left|\int_N^{\xi}\sin px\,dx\right|+\left|\int_{\xi}^{A}\sin px\,dx\right|\le\frac{4}{p}\quad（\forall A>N），$$

因此$\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\right|\le\dfrac{4}{p}$，从而

$$\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx=0。$$

而由 Riemann 引理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{N}\psi(x)\sin pxdx=0。$$

因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\,dx=\lim_{p\to+\infty}\int_0^{N}\psi(x)\sin px\,dx+\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\,dx=0。$$

2．设函数$\psi(u)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，在$u=0$点连续且有单侧导数，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du。$$

证　$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du。$$

由于

$$\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}=\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=\psi'_{+}(0)+\psi'_{-}(0)\text{，}$$

可知函数$\dfrac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$在$[0,\pi]$上可积或绝对可积，由 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du=0\text{。}$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du\to 0\text{，（}p\to+\infty\text{）。}$$

3．设函数$\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du=0\,.$$

证　$\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du$

$$=\int_0^{\delta}\left\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du$$

$$=\int_0^{\delta}[\psi(u)-\psi(0+)]\frac{\sin pu}{u}du+\int_0^{\delta}[\psi(-u)-\psi(0-)]\frac{\sin pu}{u}du\text{，}$$

因为$\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，所以$\psi(u)-\psi(0+)$和$\psi(-u)-\psi(0-)$都在$[0,\delta]$上单调，利用 Dirichlet 引理即得结论。

4．证明 Dirichlet 引理对$\psi(u)$是分段单调有界函数的情况依然成立。

证　由于$\psi(u)$在$[0,\delta]$分段单调，所以存在$\delta_1\in(0,\delta)$，使得$\psi(u)$在$[0,\delta_1]$上单调，从而满足 Dirichlet 引理条件。由于在$[\delta_1,\delta]$上$\psi(u)$分段单调有界，所以$\dfrac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}$在$[\delta_1,\delta]$上满足 Riemann 引理条件。于是

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu$$
$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^{\delta_1}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu+\lim_{p\to\infty}\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pudu=0。$$

5．证明 Lipschitz 判别法的推论。

证 取$\alpha=1$。设$\lim\limits_{u\to0}\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}=A$，则存在$\delta_1>0$，当$0<u<\delta_1$时，成立

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}-A\right|\le1，$$

令$L_1=|A|+1$，则有

$$|f(x+u)-f(x+)|\le L_1|u|。$$

同理存在$\delta_2>0$与$L_2>0$，当$0<u<\delta_2$时，有

$$|f(x-u)-f(x-)|\le L_2|u|。$$

于是令$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$L=\max\{L_1,L_2\}$，当$0<u<\delta$时，有

$$|f(x\pm u)-f(x\pm)|\le L|u|，$$

所以$f(x)$满足 Lipschitz 判别法的条件，推论成立。

6．对§16.1 的习题 2、3、4、6 中的函数，验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件，并分别写出这些 Fourier 级数的和函数。

解 容易验证这些函数都是分段单调有界，因而可积或绝对可积，所以满足 Dirichlet-Jordan 判别法的条件。

习题 2 各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases}1, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -1, & x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 。　　（2）$|\cos x|$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（3）$\frac{x^2}{2}-\pi^2$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（4）$\begin{cases} 0, & x\in[0,\pi), \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi, \\ x, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$ 。（5）$\begin{cases} bx, & x\in[0,\pi), \\ (b-a)\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi, \\ ax, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$。

习题3各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases} x+\pi, & x\in(0,\pi), \\ 0, & x=0,\pm\pi, \\ x-\pi, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$ 。 （2）$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2x}, & x\in(0,\pi), \\ 0, & x=0,\pm\pi, \\ -\mathrm{e}^{2x}, & x\in(-\pi,0), \end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}), \\ 0, & x=\pm\pi, \\ \pi, & x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi), \\ -\pi, & x\in(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}), \end{cases}$ 。（4）$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(0,1), \\ 0, & x=0, x\in[1,2]\cup[-2,-1], \\ -\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(-1,0), \end{cases}$。

习题4各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\pi|x|-x^2$，$x\in[-\pi,\pi]$。 （2）$\mathrm{e}^{|x|}$，$x\in[-\pi,\pi]$。

（3）$\begin{cases} \sin 2|x|, & x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}), \\ 1, & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\cup[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]. \end{cases}$。（4）$|x|-\dfrac{\pi}{2}+\left||x|-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$x\in[-\pi,\pi]$。

习题6各函数 Fourier 级数的和函数为

（1）$\begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,\ 2\pi), \\ 0, & x=0,\ 2\pi. \end{cases}$ 。 （2）$\begin{cases} x^2, & x\in(0,\ 2\pi), \\ 2\pi^2, & x=0,\ 2\pi. \end{cases}$。

（3）$\begin{cases} x, & x\in(0,\ 1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\ 1. \end{cases}$ 。

（4）$\begin{cases} \mathrm{e}^{3x}, & x\in(-1,0), \\ 0, & x\in(0,1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{2}, & x=\pm1. \end{cases}$ 。（5）$f(x)=\begin{cases} C, & x\in(-T,0), \\ 0, & x\in(0,T), \\ \dfrac{C}{2}, & x=0,\pm C. \end{cases}$ 。

7．利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，证明：

⑴ $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$；　　⑵ $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$．

证 （1）由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^2}{24},$$

所以

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{2\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}。$$

⑵ $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$。

8. 求$\sin x$全部非零零点的倒数的平方和。

解 $\sin x$全部非零零点为$\{\pm\pi,\pm2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots\}$，所以其倒数的平方和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n\pi)^2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}。$$

9. 证明下列关系式：

⑴ 对$0<x<2\pi$且$a\neq0$，有

$$\pi\,\mathrm{e}^{ax}=(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right];$$

⑵ 对$0<x<2\pi$且a不是自然数，有

$$\pi\cos ax=\frac{\sin2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin2a\pi\cos nx+n(\cos2a\pi-1)\sin nx}{a^2-n^2};$$

⑶ 对⑵，令$x=\pi$，有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

证 ⑴ $f(x)=\pi e^{ax}$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\text{，}(n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{n(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2}\text{，}(n=1,2,3,\cdots)\text{，}$$

可知（1）式成立。

（2） $f(x)=\pi\cos ax$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2}\text{，}(n=0,1,2,\cdots)\text{，}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{n(\cos 2a\pi-1)}{a^2-n^2}\text{，}(n=1,2,3,\cdots)\text{，}$$

可知（2）式成立。

（3）对⑵，令 $x=\pi$，利用 $\sin 2a\pi=2\sin a\pi\cos a\pi$，有

$$\pi\cos a\pi=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos n\pi}{a^2-n^2}$$

$$=\frac{\sin a\pi\cos a\pi}{a}\left[1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right],$$

所以（3）式也成立。

10．⑴验证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件而不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

⑵ 验证函数

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

满足 Dini-Lipschitz 判别法条件（今后会学到，它不满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件，在此从略）。

证 （1）$f(x)$是偶函数，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$，且当$x>0$时，$f'(x)=-\dfrac{1}{\left(\ln\frac{|x|}{2\pi}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}<0$，所以$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段单调的连续函数，满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件。但对于任意的$\alpha\in(0,1]$，由于$\lim\limits_{u\to 0+} u^{\alpha}\ln\dfrac{u}{2\pi}=0$，所以

$$\frac{|f(0+u)-f(0+)|}{u^{\alpha}}=\frac{1}{u^{\alpha}\left|\ln\dfrac{u}{2\pi}\right|}$$

无界，因此$f(x)$在$x=0$点不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

（2）当$x\neq 0$时，$f'(x)=\cos\frac{\pi}{2x}+\frac{\pi}{2x}\sin\frac{\pi}{2x}$，导数存在；在$x=0$，成立

$$|f(0\pm u)-f(0\pm)|=|x\cos\frac{\pi}{2x}|\leq|x|,$$

即满足 Lipschitz 条件，所以$f(x)$满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。今后会学到，对任意的$\delta>0$，$f(x)$在区间$[-\delta,\delta]$上不是有界变差函数，所以不能写成两个单调有界函数之差。