习　题　7.5

1. 一根 10m 长的轴，密度分布为 $\rho(x)=(0.3x+6)$ kg/m（$0\le x\le 10$），求轴的质量。

解　$m=\int_0^{10}(0.3x+6)dx=75$（kg），即轴的质量为 75kg。

2. 已知抛物线状电缆 $y=x^2$（$-1\le x\le 1$）上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比，在 $(1,1)$ 处的密度为 q，求此电缆上的总电量。

解　$Q=q\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{1+4x^2}dx=q\frac{1}{6}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$，即此电缆上的总电量为 $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)q$。

3. 水库的闸门是一个等腰梯形，上底 36m，下底 24m，高 16m，水平面距上底 4m，求闸门所受到的水压力（水的密度为 1000kg/m^3）。

解　以梯形的上底为 y 轴，从上底的中点垂直向下为 x 轴正向，则水下离水面距离为 x 处，高度为 dx 的一段闸门一侧所受的水压力为

$$dF=1000g(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx,$$

于是闸门所受的总的水压力为

$$F=1000g\int_0^{16}(4+x)\left[24+\frac{3}{4}(16-x)\right]dx\approx 5.4\times 10^7\ (\text{N})。$$

4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad t>0 \quad (a>0,b>0), \\ z=bt, \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比，试求其第一

圈的质量。

解　质量 $m=\int_0^{2\pi}kbt\sqrt{a^2+b^2}dt=2kb\sqrt{a^2+b^2}\pi^2$。

5.　一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

解　$W=\int_{15}^{30}x\cdot 10^3 g\cdot \pi 10^2 dx=1.04\times 10^9$ (J)。

6.　半径为 r 的球恰好没于水中，球的密度为 ρ，现在要将球吊出水面，最少要做多少功？

解　考虑对水下离水面距离为 x 处，厚度为 dx 的圆形薄片的做功情况：半径为 r 的球恰好离开水面，则圆形薄片的位移恰为 $2r$，其在水中移动的距离为 x，在水上移动的距离为 $2r-x$。薄片的面积为 $(2rx-x^2)\pi$，设 ρ_0 为水的密度，则将球恰好吊出水面至少要做的功为

$$W=\rho g\pi\int_0^{2r}(2r-x)(2rx-x^2)dx+(\rho-\rho_0)g\pi\int_0^{2r}x(2rx-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^4 g(2\rho-\rho_0)\text{。}$$

7.　半径为 r 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 绕其直径旋转，求它的动能。

解　$$W=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}}dx$$

$$=\rho\omega^2 r\pi\int_0^{2r}(2rx-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4\text{。}$$

8.　使某个自由长度为 1m 的弹簧伸长 2.5cm 需费力 15N，现将它从 1.1m 拉至 1.2m，问要做多少功？

解　由 $F=kx$，当 $x=0.025$m 时，$F=15$N，代入得 $k=600$。于是所做的功为

$$W=\int_{0.1}^{0.2}kxdx=9\,\text{J}。$$

9. 一物体的运动规律为$s=3t^3-t$，介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从$t=1$运动至$t=T$时阻力所做的功。

解 设介质的阻力为F，速度$v=s'=9t^2-1$，则 $F=k(9t^2-1)^2$。于是

$$W=\int_1^T Fs'dt=\int_1^T(9t^2-1)^3dt=\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2224}{35}。$$

10. 半径为 1m，高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出，试导出水面高度h随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高h时，出水速度$v=0.6\times\sqrt{2gh}$。）

解 设t时刻水面的高度为h，过了dt时间后水面的高度降低了dh，则

$$\pi 1^2dh=-\pi(0.01)^2vdt=-\pi(0.01)^2\times 0.6\sqrt{2gh}dt，$$

即

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-6\times 10^{-5}\sqrt{2g}dt。$$

对上式两边积分，注意$t=0$时，$h=2$，得到

$$h=2(1-3\times 10^{-5}\sqrt{g}t)^2，$$

以$h=0$代入，解得

$$t=\frac{10^5}{3\sqrt{g}}=1.06\times 10^4\ \text{(s)}。$$

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器，才能使水流出时水面高度下降是匀速的。

解 根据题意，只要在上题的第一个等式的左边含有因子$\sqrt{h}$即可，也即在时刻t水面的半径r须满足$r^2=k\sqrt{h}$，其中k为常数。所以可选用

曲线 $y=cx^4$ 绕 y 轴旋转一周后所得旋转曲面作为容器，从而使得水流出时水面高度下降是匀速的。

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比，设 t_0 时有镭 Q_0 g，经 1600 年它的量减少了一半，求镭的衰变规律。

解　设在时刻 t 镭的现存量为 $Q=Q(t)$，则

$$\frac{dQ}{dt}=-kQ\text{，}$$

对等式两边积分，注意在时刻 t_0 有镭 Q_0 g，得到

$$Q(t)=Q_0e^{-k(t=t_0)}\text{。}$$

由题意，当 $t-t_0=1600$ 时，$Q(t)=\frac{Q_0}{2}$，代入上式，得到 $k=\frac{\ln 2}{1600}$，所以

$$Q=Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}\text{。}$$

13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比，设反应开始时有 B 物质 20%，半小时后有 B 物质 25%，求 B 物质的浓度的变化规律。

解　设在时刻 t，B 物质的浓度为 $y(t)$，则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k}{y}\text{，}$$

解得

$$y=\sqrt{2kt+c}\text{。}$$

因为 $y(0)=\frac{1}{5}$，$y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，所以 $c=\frac{1}{25}, k=\frac{9}{400}$，于是得到

$$y=\frac{\sqrt{18t+16}}{20}\text{。}$$

14. 设 $[t,t+dt]$ 中的人口增长量与 $p_{\max}-p(t)$ 成正比，试导出相应的人口模型,画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模

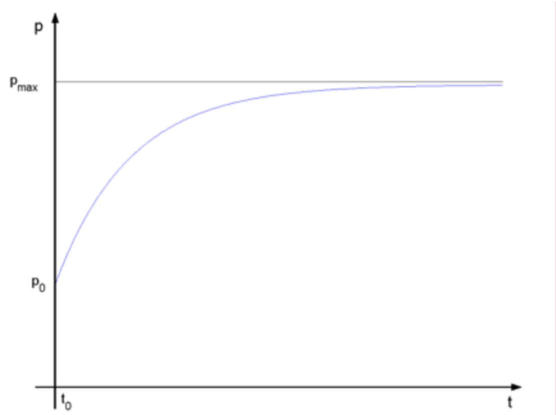
型加以比较。

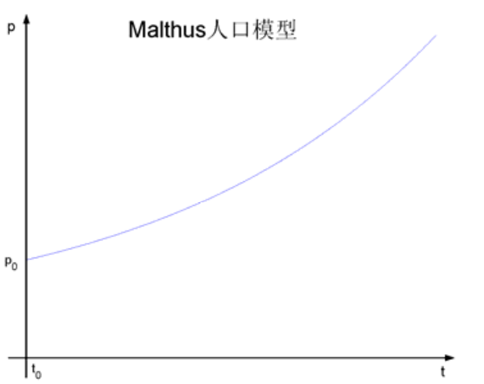
解　由题意可知

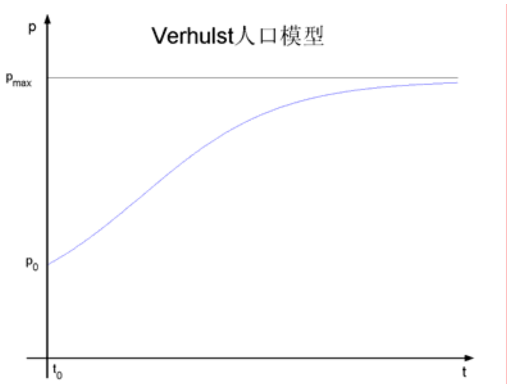
$$\frac{dp(t)}{dt}=k(p_{\max}-p(t))，\quad p(t_0)=p_0，$$

由此可解得

$$p(t)=p_{\max}-(p_{\max}-p_0)e^{-k(t-t_0)}。$$







15.　核反应堆中，t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比。设 $N(0)=N_0$，证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1}=\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}。$$

证　由题意可知

$$\frac{dN}{dt}=kN，$$

对等式两边积分，再注意 $N(0)=N_0$，可解得

$$N(t)=N_0e^{kt},$$

由此即可得到

$$\left(\frac{N(t_2)}{N_0}\right)^{t_1}=e^{kt_1t_2}=\left(\frac{N(t_1)}{N_0}\right)^{t_2}。$$

16. 一个 1000m^{3}的大厅中的空气内含有a %的废气，现以 1m^3／min 注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求t时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间。

解 设在时刻t空气内含有的废气浓度为$y(t)$，则

$$dy=-\frac{1}{1000}y(t)dt,\quad y(0)=\frac{a}{100},$$

解此方程，即得到

$$y(t)=\frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}。$$

当$y(t)=\dfrac{a}{200}$时，有 $e^{\frac{t}{1000}}=2$，从而得到 $t=1000\ln 2$ （min），即废气浓度减少一半所需的时间为 $1000\ln 2$ （min）。