习　题　15.3　Euler 积分

1. 计算下列积分：

（1）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$；　　（2）$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$；

（3）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$　（$n>0$）；　　（4）$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$　（$n>m>0$）；

（5）$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；　　（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}} x dx$；

（7）$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx$　（$m,n>0$）；　　（8）$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx$　（$p,q,n>0$）。

解（1）$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{8}\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{8}$。

（2）作变换 $\sqrt{t} = \frac{1-\cos x}{2}$，则

$$x = 2\arcsin t^{\frac{1}{4}},\quad dx = \frac{dt}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t^{\frac{1}{2}}}},\quad 3-\cos x = 2(1+t^{\frac{1}{2}}),$$

于是

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})。$$

（3）作变换 $t = x^n$，则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}。$$

（4）作变换 $x^{\frac{n}{2}} = \tan\theta$，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{2m}{n}-1}\theta d\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2m}{n}-1}\theta\cos^{1-\frac{2m}{n}}\theta d\theta,$$

再作变换 $t = \sin^2\theta$，得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}(1-t)^{-\frac{m}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}。$$

（5）作变换 $t = \frac{x}{1+x}$，则

$$x = \frac{t}{1-t}, dx = \frac{1}{(1-t)^2}dt,$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\mathrm{B}(\frac{5}{4},\frac{3}{4})=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

（6）作变换$t=\sin^2 x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(4+\frac{3}{4})}=\frac{3!}{2\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{256}{1155}。$$

（7）作变换$t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma(\frac{m+1}{n})。$$

（8）作变换$t=x^n$，则

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{p}{n}-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{1}{n}B\left(\frac{p}{n},q\right)。$$

2．证明$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$（$n$为正整数），并推出$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$。

证　令$t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)。$$

利用$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$以及Γ函数的连续性，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)=\Gamma(1)=1。$$

3． 证明$\Gamma(s)$在$s>0$上可导，且$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。进一步证明$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$　（$n\ge 1$）。

证　$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。任意取$0<s_0<S_0<+\infty$。

当$s\ge s_0$，$x\in(0,1]$时，$\left|x^{s-1}e^{-x}\ln x\right|\le x^{s_0-1}|\ln x|$，而$\int_0^1 x^{s_0-1}|\ln x|dx$收敛，所以$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$在$s\ge s_0$上一致收敛；

当$s\le S_0$，$x\in[1,+\infty)$时，$\left|x^{s-1}e^{-x}\ln x\right|\le x^{S_0}e^{-x}$，而$\int_1^{+\infty}x^{S_0}\mathrm{e}^{-x}dx$收敛，所以$\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$在$s\le S_0$上一致收敛。

这说明$\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$关于$s$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛。于是$\Gamma(s)$在在$s>0$上可导，且$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。

进一步，若$\Gamma^{(n-1)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^{n-1}dx$，类似于上述的论证过程，可知$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^{n-1}\right]dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$在$(0,+\infty)$上内闭一致收

敛，从而$\Gamma^{(n-1)}(s)$在$s>0$上可导，并且$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx$。

4．证明$\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$。

证　首先易知$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$。由于$\Gamma(s)$在$s>0$上可导，由 Rolle 定理，可知$\exists x_0\in(1,2)$，使$\Gamma'(x_0)=0$。

由上题，$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln^2 xdx>0$，于是在$(x_0,+\infty)$上$\Gamma'(s)>0$，因此$\Gamma(s)$在$(x_0,+\infty)$上单调增加。再由$\Gamma([s])\le\Gamma(s)\le\Gamma([s]+1)$，$(s>x_0)$以及$\Gamma(n+1)=n!\to+\infty$，得到

$$\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty。$$

5．计算$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$。

解 作变换$x=1-t$，则

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx，$$

相加后利用余元公式，即得到

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right]dx=\int_0^1(\ln\pi-\ln\sin\pi x)dx。$$

再由

$$\int_0^1\ln\sin\pi xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln\sin udu=-\ln 2，$$

得到

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}。$$

6．设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le1\}$。确定正数$p$，使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_\Omega\frac{dxdydz}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^p}$$

收敛。并在收敛时，计算I的值

解 利用球坐标变换，可得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}=4\pi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}。$$

由此可知当$p<1$时，反常重积分$I=\iiint\limits_\Omega\frac{dxdydz}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^p}$收敛。

且当$p<1$时，

$$I=2\pi\int_0^1\frac{rdr^2}{(1-r^2)^p}=2\pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)。$$

7．设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x\ge0,y\ge0,z\ge0\}$。确定正数$\alpha,\beta,\gamma$，使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_\Omega\frac{dxdydz}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}$$

收敛。并在收敛时，计算I的值。

解 作变换$\begin{cases} x = u^{\frac{2}{\alpha}} \\ y = v^{\frac{2}{\beta}} \\ z = w^{\frac{2}{\gamma}} \end{cases}$，则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\iiint_{\Omega'}\frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1}v^{\frac{2}{\beta}-1}w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2}dudvdw,$$

其中$\Omega' = \{(u,v,w) \mid u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0\}$。

再令$\begin{cases} u = r\sin\varphi\cos\theta \\ v = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，则

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr。$$

对于上式中所包含的前两个积分，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\theta\left(\cos^2\theta\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta d\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta});$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})。$$

对于第三个积分，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr = \int_0^1\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr + \int_1^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr。$$

因为$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1>-1$，所以积分$\int_0^1\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$收敛，而积分$\int_1^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$当且仅当$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1<1$即$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$时收敛。所以当$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$收敛，从而原积分收敛。

这时作变量代换$r^2 = t$，得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)。$$

所以

$$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})\mathrm{B}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma})\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(\frac{1}{\gamma})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma})。$$

注　对积分$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$，也可令$r=\tan\theta$，同样得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}(\cos\theta)^{1-\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)。$$

8．计算

$$I=\iint_D x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}dxdy，$$

其中**D**是由三条直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的闭区域，m,n,p均为大于 0 的正数。

解　作变换$\begin{cases}u=x+y\\ v=\dfrac{y}{x+y}\end{cases}$，则$\begin{cases}x=u(1-v)\\ y=uv\end{cases}$，且$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$，这变换将区域**D**映照成正方形：

$$\{(u,v)|0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1\}。$$

于是

$$I=\int_0^1 u^{m+n-1}(1-u)^{p-1}du\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{m-1}dv=\mathrm{B}(m+n,p)\mathrm{B}(n,m)$$

$$=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}。$$

注　当$p>1$时也可以有如下解法：

将积分化成

$$I=(p-1)\iiint_\Omega x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}dxdydz，$$

其中Ω是由平面$x=0$，$y=0$，$z=0$与$x+y+z=1$所围的区域。

再令$\begin{cases}x=u^2\\ y=v^2\\ z=w^2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\ v=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，就得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr\text{。}$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{n-1}(1-\sin^2\theta)^{m-1}d\sin^2\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}(n,m)\text{，}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi)^{m+n-1}(1-\sin^2\varphi)^{p-2}d\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}(m+n,p-1)\text{，}$$

$$\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr=\frac{1}{2(m+n+p-1)}\text{，}$$

于是

$$I=\frac{p-1}{m+n+p-1}\mathrm{B}(n,m)\mathrm{B}(m+n,p-1)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}\text{。}$$

9．证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha xdx=\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$　（$|\alpha|<1$）。

证　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\cos^{-\alpha}xdx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\text{。}$$

10．证明

$$\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^\alpha\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}$$

（$0<\alpha<2,0<k<1$）。

证 作变量代换$t=\tan\dfrac{\varphi}{2}$，则

$$\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2}\text{，}$$

再作变量代换$\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}\,t=\tan\theta$，则

$$2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2}=$$

$$\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta d\theta=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}B\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi},$$

这里最后一个等式利用了余元公式。所以

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}。$$

11．设$0\le h<1$，正整数$n\ge 3$。证明

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

证 作变量代换 $t=hu$，则

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^1(1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt,$$

再作变量代换$u=\sin\theta$，得到

$$h\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta=\frac{h}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)。$$

$$=\frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

所以

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$