习　题　8.2　反常积分的收敛判别法

1. ⑴　证明比较判别法（定理 8.2.2）；

⑵　举例说明，当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性可以产生各种不同的的情况。

解（1）**定理 8.2.2(比较判别法)**　设在 $[a,+\infty)$ 上恒有 $0\le f(x)\le K\varphi(x)$，其中 K 是正常数。则

当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

证　当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0\text{，}\ \exists A_0\ge a\text{，}\ \forall A,A'\ge A_0\text{：}\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{K}\text{。}$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le\left|\int_A^{A'}K\varphi(x)dx\right|<\varepsilon\text{，}$$

所以 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，应用反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists\varepsilon_0>0\text{，}\ \forall A_0\ge a\text{，}\ \exists A,A'\ge A_0\text{：}\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\ge K\varepsilon\text{。}$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|\ge\left|\int_A^{A'}\frac{1}{K}f(x)dx\right|\ge\varepsilon_0\text{，}$$

所以 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散。

（2）设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。则当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 可能收敛，

也可能发散。

例如 $f(x)=\frac{1}{x^2}$， $\varphi(x)=\frac{1}{x^p}(0<p<2)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$。显然有 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，而对于 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当 $1<p<2$ 时收敛，当 $0<p\le 1$ 时发散。

设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\ge 0,\varphi(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。则当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也收敛；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 可能发散，也可能收敛。

例如 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$， $\varphi(x)=\frac{1}{x^p}(p>\frac{1}{2})$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$。显然有 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散，而对于 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx$，则当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛。

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式（定理 8.2.3）。

证 定理 8.2.3（Cauchy 判别法） 设在 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge 0$，K 是正常数。

(1) 若 $f(x)\le\frac{K}{x^p}$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

(2) 若 $f(x)\ge\frac{K}{x^p}$，且 $p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式） 设在 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l,$$

则

(1) 若 $0\le l<+\infty$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

⑵ 若$0 < l \le +\infty$，且$p \le 1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

证 直接应用定理 8.2.2（比较判别法）及其推论（比较判别法的极限形式），将函数$\varphi(x)$取为$\frac{1}{x^p}$。

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

⑴ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx$；

⑵ $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^3} dx$；

⑶ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x|\sin x|} dx$；

⑷ $\int_1^{+\infty} \frac{x^q}{1 + x^p} dx$ （$p, q \in \mathbf{R}^+$）.

解 （1）当$x \to +\infty$时，

$$\frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 - e^{-2x} + \ln x + 1}} dx$收敛。

（2）当$x \to +\infty$时，

$$\frac{\arctan x}{1 + x^3} \sim \frac{\pi}{2x^3},$$

所以积分$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^3} dx$收敛。

（3）因为当$x \ge 0$时有

$$\frac{1}{1 + x|\sin x|} \ge \frac{1}{1 + x},$$

而积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x} dx$发散，所以积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x|\sin x|} dx$发散。

（4）当$x \to +\infty$时，

$$\frac{x^q}{1 + x^p} \sim \frac{1}{x^{p-q}},$$

所以在 $p-q>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 发散。

4. 证明：对非负函数 $f(x)$，(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是等价的。

证 显然，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛可推出 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，现证明当 $f(x)\ge 0$ 时可由 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛推出 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

由于 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，可知极限

$$\lim_{A\to+\infty}F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

存在而且有限，由 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0，\ \exists A_0>0，\ \forall A,A'\ge A_0：|F(A)-F(A')|<\varepsilon，$$

于是 $\forall A,A'\ge A_0$ 与 $\forall B,B'\ge A_0$，成立

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\le|F(A)-F(A')|<\varepsilon \quad 与 \quad \left|\int_{-B'}^{-B}f(x)dx\right|\le|F(B)-F(B')|<\varepsilon，$$

这说明积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ 都收敛，所以积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

5. 讨论下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛和发散，下同）：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）； (4) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$；

(5) $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$ （$p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别是 m 和 n 次多项式，$q_n(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 范围无零点。）

解 (1) 因为 $F(A)=\int_2^{A}\sin xdx$ 有界，$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$ 收敛；

由于$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right| \geq \left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\sin^2 x = \frac{1}{2}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|(1-\cos 2x)$，而积分

$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|dx$发散，$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\cos 2xdx$收敛，所以积分$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|dx$发散，即积分$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin xdx$条件收敛。

（2）当$p>1$时，$\frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$绝对收敛；

当$0<p\leq 1$时，因为$F(A)=\int_1^A \sin xdx$有界，$\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调，且$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$收敛；但因为当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$发散，所以当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛。

（3）当$p>1$时，$\frac{|\sin x\arctan x|}{x^p} \leq \frac{\pi}{2x^p}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$绝对收敛；

当$0<p\leq 1$时，因为$F(A)=\int_1^A \sin xdx$有界，$\frac{\arctan x}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调，且$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$收敛；但因为当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|dx$发散，所以当$0<p\leq 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$条件收敛。

（4）令$t=x^2$，$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$，由于$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$条件收敛，可知积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$条件收敛。

（5）当$n>m+1$且x充分大时，有$\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|\le\frac{K}{x^2}$，可知当$n>m+1$时积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$绝对收敛。

当$n=m+1$时，因为$F(A)=\int_1^A\sin xdx$有界，且当x充分大时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$单调且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=0$，由 Dirichlet 判别法可知$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$收敛；但由于当$x\to+\infty$时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sim\frac{a}{x}$，易知$\int_1^{+\infty}\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|dx$发散，所以当$n=m+1$时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$条件收敛。

当$n<m+1$时，由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=A$，$A$为非零常数、$+\infty$或$-\infty$，易知积分$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin xdx$发散。

6. 设$f(x)$在$[a,\ b]$只有一个奇点$x=b$，证明定理 8.2.3'和定理 8.2.5'。

定理 8.2.3′（Cauchy 判别法） 设在$[a,b)$上恒有$f(x)\ge 0$，若当x属于b的某个左邻域$[b-\eta_0,b)$时，存在正常数K，使得

(1) $f(x)\le\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

(2) $f(x)\ge\frac{K}{(b-x)^p}$，且$p\ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

证 （1）当$p<1$时，积分$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$收敛，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall\eta,\eta'\in(0,\delta):\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}dx\right|<\frac{\varepsilon}{K}。$$

由于$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|\le\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}dx\right|<\varepsilon$，所以$\int_a^b f(x)dx$收敛。

（2）当 $p\ge 1$时，积分$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx$发散，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\ \exists\eta,\eta'\in(0,\delta):\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}dx\right|\ge\frac{\varepsilon_0}{K}。$$

由于$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)dx\right|\ge\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}dx\right|\ge\varepsilon_0$，所以$\int_a^b f(x)dx$发散。

推论（Cauchy 判别法的极限形式）设在$[a,b)$上恒有 $f(x)\ge 0$，且

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l,$$

则

⑴ 若$0\le l<+\infty$，且 $p<1$，则$\int_a^b f(x)dx$收敛；

⑵ 若$0<l\le+\infty$，且 $p\ge 1$，则$\int_a^b f(x)dx$发散。

证 （1）由 $\lim\limits_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l$ （$p<1,\ 0\le l<+\infty$），可知

$$\exists\delta>0,\ \forall x\in(b-\delta,b):\ f(x)<\frac{l+1}{(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（1）。

（2）由 $\lim\limits_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l$ （$p\ge 1,\ 0<l\le+\infty$），可知

$$\exists\delta>0,\ \forall x\in(b-\delta,b):\ f(x)>\frac{l}{2(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的（2）。

定理 8.2.5′ 若下列两个条件之一满足，则$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛：

⑴（**Abel 判别法**）　$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界；

⑵（**Dirichlet 判别法**）$F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx$ 在 $(0,b-a]$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$。

证　（1）设 $|g(x)|\le G$，因为 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall A,A'\in(b-\delta,b)$：$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{2G}$。

由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|$$
$$\le G\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+G\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

（2）设 $|F(\eta)|\le M$，于是 $\forall A,A'\in[a,b)$，有 $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<2M$。因为 $\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(b-\delta,b)$，有 $|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$。由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right|$$
$$\le 2M|g(A)|+2M|g(A')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

所以无论哪个判别法条件满足，由 Cauchy 收敛原理，都有 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛的结论。

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

⑴ $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$；　　⑵ $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2-1}dx$；

⑶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$；　　⑷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos x}{x^p}dx$；

⑸ $\int_0^1 |\ln x|^p\,dx$；　　⑹ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$；

⑺ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\,dx$.

解　（1）因为 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 0+)$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 1-)$，

所以积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ 收敛。

（2）因为$\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$，且对任意$0<\delta<1$，$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^{\delta}\ln x}{x^2-1}=0$，即当$x>0$充分小时，有$\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right|<\frac{1}{x^{\delta}}$，所以积分$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx$收敛。

（3）因为$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{x^2}\ (x\to 0+)$，$\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$发散。

（4）因为$\frac{1-\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{p-2}}\ (x\to 0+)$，所以当$p<3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$收敛，当$p\ge 3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$发散。

（5）首先对任意的$0<\delta<1$与任意的p，有$\lim\limits_{x\to 0+}[x^{\delta}|\ln x|^p]=0$，即当$x>0$充分小时，有$|\ln x|^p<\frac{1}{x^{\delta}}$；且 $|\ln x|^p\sim\frac{1}{(1-x)^{-p}}\ (x\to 1-)$。所以当$p>-1$时，积分$\int_0^1|\ln x|^p dx$收敛，当$p\le -1$时，积分$\int_0^1|\ln x|^p dx$发散。

（6） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$， $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\ (x\to 1-)$，所以在$p>0, q>0$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 发散。

（7） $x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\sim\frac{1}{(1-x)^{-q}}\ (x\to 1-)$，且

$\lim\limits_{x\to 0+}[x^{1-\frac{p}{2}}(x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|)]=0$，即当$x>0$充分小时，有

$x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|<\frac{1}{x^{1-\frac{p}{2}}}$，所以当$p>0, q>-1$时积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$发散。

8．讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ （$p,q\in \mathbf{R}^+$）；　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p}dx$；

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$；　　(6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx$；

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p+x^q}dx$；　　(8) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p\ln^q x}dx$.

解（1）$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$。

当 $p>0$，$q>0$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}dx$ 与积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}dx$ 显然收敛，且当 $x\to 1-$ 时，

$$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{\left[(1+(x-1))^{p-1}-1\right]-\left[(1+(x-1))^{q-1}-1\right]}{\ln(1+(x-1))}\sim\frac{(p-q)(x-1)}{x-1}=p-q，$$

即 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 不是反常积分，所以积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 收敛。

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$
$+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$。

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 0+)，$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 1-)，$$

所以积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛；

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim -\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to 1+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 2-),$$

所以积分$\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛；

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to 2+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\ (x\to +\infty),$$

所以积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛。

由此可知积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$收敛。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$。

由$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当$p<2$时，积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，当$p\ge 2$时，积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散；

当$p>1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{3p-1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}\right]=0$，即当$x>0$充分大时，有$\frac{\ln(1+x)}{x^p}<\frac{1}{x^{\frac{3p-1}{2}}}$，其中$\frac{3p-1}{2}>1$，可知当$p>1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，当$p\le 1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散；

综上所述，当$1<p<2$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$发散。

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$。

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$,可知当$p<2$时积分$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛；

由$\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{\pi}{2x^p}\ (x\to+\infty)$，可知当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛。

所以当$1<p<2$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$发散。

（5）$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$。

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\ (x\to 0+)$，可知当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\ge\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散；

由$\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\frac{2^p}{\pi^p(\frac{\pi}{2}-x)^{\frac{1}{2}}}\ (x\to\frac{\pi}{2}-)$，可知积分$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛。

所以当$p<\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$收敛，当$p\ge\frac{3}{2}$时积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$发散。

（6）$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$。

由于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$收敛，及$x^{p-1}e^{-x}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，所以当$p>0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$收敛，当$p\le 0$时积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx$发散。

（7）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx=\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$。

当 $p=q$ 时，显然积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散；

当 $p\neq q$ 时，由于

$$\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\min(p,q)}}\ (x\to 0+),\quad \frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\max(p,q)}}\ (x\to+\infty),$$

所以当 $\min(p,q)<1$，且 $\max(p,q)>1$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 收敛，其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx$ 发散。

（8）设 $p>1$，则对任意的 q，当 x 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}>1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛。

设 $p<1$，则对任意的 q，当 x 充分大时，有 $\frac{1}{x^p\ln^q x}>\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，因为 $\frac{p+1}{2}<1$，可知积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

设 $p=1$，令 $\ln x=t$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$，由此可知当 $p>1$ 或 $p=1, q>1$ 时积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$ 发散。

9. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$；

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$ （$p\geq 0$）；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$；　　　　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$　（$p>0$）.

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$。

由$\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to 0+)$，$\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{3-p}}\ (x\to+\infty)$，可知当$0<p<2$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}dx$发散。

（2）当$q<p-1$时，由$\frac{x^q\,|\sin x|}{1+x^p}<\frac{1}{x^{p-q}}$，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$绝对收敛。

当$p-1\le q<p$时，因为$F(A)=\int_1^A\sin x dx$有界，当x充分大时$\frac{x^q}{1+x^p}$单调减少，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$收敛；但因为积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^q\,|\sin x|}{1+x^p}dx$发散，所以当$p-1\le q<p$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$条件收敛。

当$q\ge p$时，由于$n\to\infty$时$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$不趋于零，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}dx$发散。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$。

由$\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}\ (x\to 0+)$，可知当$p<1$时积分$\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散。

当$p<1$时，易知积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\,|\cos x|}{x^p}dx$发散；当$p\le 0$时，易知积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散。

当 $0<p<1$ 时，因为 $\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos xdx\right|<e-1$， $\frac{1}{x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法；可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛。

综上所述，当$0<p<1$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$条件收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散。

（4） $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$。

由$\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<2$ 时积分$\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$收敛，在其余情况下积分$\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$发散。

当$1<p<2$时，显然积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$收敛；当 $p\le 1$时，易知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$发散；当 $p\le 0$时，易知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$发散。

当$0<p\le 1$时，因为$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{\sin x}\sin 2xdx=0$，可知$\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin 2xdx\right|$有界，且$\frac{1}{x^p}$单调减少， $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$收敛。

综上所述，当$1<p<2$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$绝对收敛，当$0<p\le 1$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$条件收敛，在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$发

散。

（5）令$t=\frac{1}{x^2}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3-p}{2}}}\cos tdt \text{。}$$

于是可知当$p<1$时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$绝对收敛；当$1\le p<3$时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$条件收敛，当$p\ge 3$时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$发散。

（6）当$p>1$时，因为$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\le\frac{1}{x^p}$，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$绝对收敛。

当$0<p\le 1$时，因为$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx>\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$发散，所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx$发散；又因为

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cos x+\cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}dx$，注意到当$x$充分大时，$\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$与$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$都是单调减少的，由 Dirichlet 判别法可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$收敛，所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$条件收敛。

10．证明反常积分$\int_0^{+\infty}x\sin x^4\sin xdx$收敛。

证 对任意 $A''>A'>A$，由分部积分法，

$$\int_{A'}^{A''} x\sin x^4 \sin x dx = -\int_{A'}^{A''} \frac{\sin x}{4x^2} d(\cos x^4)$$

$$=\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''} + \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \cos x}{4x^2}dx - \int_{A'}^{A''} \frac{\cos x^4 \sin x}{2x^3}dx \text{。}$$

显然，当 $A\to+\infty$ 时，等式右端的三项都趋于零，由 Cauchy 收敛原理，可知反常积分 $\int_0^{+\infty} x\sin x^4 \sin x dx$ 收敛。

11．设 $f(x)$ 单调，且当 $x\to 0+$ 时 $f(x)\to+\infty$，证明：$\int_0^1 f(x)dx$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{x\to 0+} xf(x)=0$。

证 首先由 $f(x)$ 的单调性，对于充分小的 $0<x<1$，有

$$0\le \frac{x}{2}f(x)\le \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to 0+}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=0$，于是得到

$$\lim_{x\to 0+} xf(x)=0 \text{。}$$

12．设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0 \text{。}$$

证 首先容易知道当 $x\to+\infty$ 时，$xf(x)$ 单调减少趋于 0，于是有 $xf(x)\ge 0$，且

$$0\le \frac{1}{2}x(\ln x)f(x)\le \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt \text{。}$$

然后由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt=0$，于是得到

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0 \text{。}$$

13．设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$ 收敛。

证 首先由分部积分法，

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx = \int_0^{+\infty} \sin^2 xdf(x) = -\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx\text{。}$$

由于$F(A)=\int_0^A \sin 2xdx$有界，$f(x)$单调下降，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分$\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$收敛，从而积分$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$收敛。

14．设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

证 首先由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知$\exists A>a$，$\forall x>A$，有$|f(x)|<1$，即当$x>A$时，成立$f^2(x)\le|f(x)|$。因为积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，于是由比较判别法，积分$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

15． 若$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上平方可积（类似可定义无界函数在$[a,b]$上平方可积的概念）。

⑴ 对两种反常积分分别探讨$f(x)$平方可积与$f(x)$的反常积分收敛之间的关系；

⑵ 对无穷区间的反常积分，举例说明，平方可积与绝对收敛互不包含；

⑶ 对无界函数的反常积分，证明：平方可积必定绝对收敛，但逆命题不成立。

解 （1）$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛不能保证$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛，但$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$发散；

$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛不能保证$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，则$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，但$\int_1^{+\infty} f(x)dx$发散。

（2）$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，例如：$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 不是绝对收敛的；

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，例如：

$f(x)=\begin{cases} n & x\in\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 发散。

（3）由 $|f(x)|\le\frac{1}{2}[1+f^2(x)]$，可知 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛保证 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛；但 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\int_0^1 f(x)dx$ 绝对收敛，但 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 发散。

16．证明反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$$

当 $p\le\frac{1}{2}$ 时发散，当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时条件收敛，当 $p>1$ 时绝对收敛。

证　当 $p>1$ 时，对充分大的 x，有 $\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\frac{2}{x^p}$，由于积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^p}dx$ 收敛，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ 绝对收敛。

当 $0<p\le 1$ 时，利用等式

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}。$$

这时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛；积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$ 当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时收敛，当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 发散。

当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时，由于 $\int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx\ge\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$ 发散，所以积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx$ 发散。

综上所述，当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$条件收敛；当$0<p\le\frac{1}{2}$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。

当$p\le 0$时，因为有$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx>\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2}dx>\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$，由 Cauchy 收敛原理，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$发散。