第十一章　Euclid 空间上的极限和连续

习题 11.1　Euclid 空间上的基本定理

1.　证明定理 11.1.1： 距离满足正定性、对称性和三角不等式。

证　(a) 显然有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\ge 0$，而且

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0 \Leftrightarrow x_i=y_i \ \ (i=1,2,\cdots,n) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\text{。}$$

(b) 由距离定义直接可得

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\text{。}$$

(c) 由于

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-tb_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}-2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\ge 0\text{，}$$

所以关于上述两次三项式的判别式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}\le 0\text{，}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\text{。}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}+\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\right)^2\text{，}$$

即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}\text{。}$$

令 $a_i=x_i-y_i, b_i=y_i-z_i$，则有

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}} = |\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,| + |\,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\,|。$$

2. 证明：若 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛，则其极限是唯一的。

证 假设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 都是点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限，则 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1 : |\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\,| < \varepsilon，$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2 : |\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}\,| < \varepsilon。$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时，成立

$$|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,| < |\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\,| + |\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}\,| < 2\varepsilon，$$

由于 ε 是任意正数，所以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，即极限是唯一的。

3. 设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 收敛，证明：对于任何实数 α, β，成立等式

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha \boldsymbol{x}_k + \beta \boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k。$$

证 设 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$，$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}$，则 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\exists N_1, \forall k > N_1 : |\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\,| < \varepsilon，$$

$$\exists N_2, \forall k > N_2 : |\,\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\,| < \varepsilon，$$

于是当 $k > \max\{N_1, N_2\}$ 时，成立

$$|\,(\alpha \boldsymbol{x}_k + \beta \boldsymbol{y}_k) - (\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y})\,| \le |\,\alpha\,|\,|\,\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\,| + |\,\beta\,|\,|\,\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}\,| < (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)\varepsilon，$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha \boldsymbol{x}_k + \beta \boldsymbol{y}_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k。$$

4. 求下列 $\mathbf{R}^2$ 中子集的内部、边界与闭包：

（1）$\mathbf{S} = \{(x,y) \mid x > 0, y \ne 0\}$；

（2）$\mathbf{S} = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$；

（3）$\mathbf{S} = \left\{(x,y) \mid 0 < x \le 1, \ y = \sin\frac{1}{x}\right\}$。

解 (1) $\mathbf{S}^{\circ} = \{(x,y) | x > 0, y \ne 0\}$；$\partial \mathbf{S} = \{(x,y) | x = 0 \text{或} x > 0, y = 0\}$;

$$\overline{\mathbf{S}} = \{(x,y) | x \ge 0\}。$$

(2) $\mathbf{S}^{\circ} = \{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$; $\partial \mathbf{S} = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 0 \text{或} x^2 + y^2 = 1\}$;

$$\overline{\mathbf{S}} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}。$$

(3) $\mathbf{S}^{\circ} = \varnothing$; $\partial \mathbf{S} = \left\{(x,y) \middle| 0 < x \le 1, y = \sin\frac{1}{x} \text{或} x = 0, -1 \le y \le 1\right\}$;

$$\overline{\mathbf{S}} = \left\{(x,y) \middle| 0 < x \le 1, y = \sin\frac{1}{x} \text{或} x = 0, -1 \le y \le 1\right\}。$$

5.　求下列点集的全部聚点：

（1）$\mathbf{S} = \left\{ (-1)^k \frac{k}{k+1} \,\middle|\, k = 1,2,\cdots \right\}$；

（2）$\mathbf{S} = \left\{ \left(\cos\frac{2k\pi}{5}, \sin\frac{2k\pi}{5} \right) \,\middle|\, k = 1,2,\cdots \right\}$；

（3）$\mathbf{S} = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \leq 0\}$。

解 (1) $\mathbf{S}' = \{\pm 1\}$。

(2) $\mathbf{S}' = \varnothing$。

(3) $\mathbf{S}' = \{(x,y) \mid y^2 - x^2 + 1 \leq 0\}$。

6. 证明定理 11.1.3：$\boldsymbol{x}$是点集$\mathbf{S}$（$\subset \mathbf{R}^n$）的聚点的充分必要条件是：存在$\mathbf{S}$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$（$k = 1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$ 。

证 必要性：假设$\boldsymbol{x}$是点集$\mathbf{S}$的聚点，对于$\delta = \frac{1}{k}$，　在$\boldsymbol{x}$的$\delta = \frac{1}{k}$邻域中任取一点$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$，则有$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$ 。

充分性：用反证法。假设$\boldsymbol{x}$不是点集$\mathbf{S}$的聚点，则在$\boldsymbol{x}$的某邻域$O(\boldsymbol{x},\delta), \delta > 0$中，最多只有$\mathbf{S}$的有限个点，所以$\boldsymbol{S} \cap O(\boldsymbol{x},\delta) - \{\boldsymbol{x}\}$为有限集，于是$d = \inf\{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}\} > 0$，故不存在$\mathbf{S}$中满足$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$以$\boldsymbol{x}$为极限，产生矛盾。

7.　设 $\mathbf{U}$ 是$\mathbf{R}^2$上的开集，是否 $\mathbf{U}$ 的每个点都是它的聚点。对于$\mathbf{R}^2$中的闭集又如何呢？

解 开集 $\mathbf{U}$ 中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 一定是它的内点，所以 $\boldsymbol{x}$ 的任意邻域都有 $\mathbf{U}$ 中的无限个点，所以 $\boldsymbol{x}$ 一定是 $\mathbf{U}$ 的聚点。

由于 $\mathbf{S} = \{(0,0)\}$是$\mathbf{R}^2$上的闭集，而 S 只有一个点，所以无聚点，即闭集中的点不一定是它的聚点。

8.　证明$\mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$的所有内点组成的点集$\mathbf{S}^\circ$必是开集。

证　假设　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}^\circ$，则$\exists \delta > 0$，　$O(\boldsymbol{x},\delta) \subset \boldsymbol{S}$ 。而 $\forall \boldsymbol{y} \in O(\boldsymbol{x},\delta)$，　由于 $O(\boldsymbol{y}, \delta - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|) \subset O(\boldsymbol{x},\delta)$，所以 $\boldsymbol{y}$ 也是 S 的内点，从而$O(\boldsymbol{x},\delta) \subset \boldsymbol{S}^\circ$，于是$\mathbf{S}^\circ$必是开集。

9.　证明$\mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$的闭包$\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cup \mathbf{S}'$必是闭集。

证 假设 $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbf{S}}^c$，则 $\boldsymbol{x} \notin \mathbf{S}$，且 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点，于是在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域$O(\boldsymbol{x},\delta)$中至多只有 $\boldsymbol{S}$ 的有限项，故存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域$O(\boldsymbol{x},\delta_1)$不含 $\boldsymbol{S}$ 的点，即

$O(\boldsymbol{x},\delta_1)\subset\overline{\mathbf{S}}^c$，从而$\overline{\mathbf{S}}^c$为开集，所以$\overline{\mathbf{S}}$必是闭集。

10. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$。若$\mathbf{E}$为开集，$\mathbf{F}$为闭集，证明：$\mathbf{E}\setminus\mathbf{F}$为开集，$\mathbf{F}\setminus\mathbf{E}$为闭集。

证 由于$\mathbf{F}$为闭集，所以$\mathbf{F}^c$为开集，而$\mathbf{E}\setminus\mathbf{F}=\mathbf{E}\bigcap\mathbf{F}^c$，也是开集。由于$\mathbf{E}$为开集，所以$\mathbf{E}^c$为闭集，从而$\mathbf{F}\setminus\mathbf{E}=\mathbf{F}\bigcap\mathbf{E}^c$也是闭集。

11. 证明 **Cantor** 闭区域套定理。

证 假设$\{S_k\}$是非空闭集序列，满足

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots,$$

以及$\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$。任取$\boldsymbol{x}_k\in S_k$，则当$m, n>k$时，$\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_n\in S_k$，从而成立$|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|\le\operatorname{diam}S_k$，于是$\{\boldsymbol{x}_k\}$是基本序列，从而收敛，设其极限为$\boldsymbol{x}$。对于任意$k$，当$m\ge k$时，$\boldsymbol{x}_m\in S_k$，所以$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限$\boldsymbol{x}\in\bar{S}_k=S_k$，于是$\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$，所以$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$非空。

再证唯一性。假设$\boldsymbol{y}\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$，则$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le\operatorname{diam}S_k\to0$（$k\to\infty$），所以$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$。

12. 举例说明：满足$\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=0$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$不一定收敛。

解 $\boldsymbol{x}_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\in\mathbf{R}$，则$\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0$，而 $|\boldsymbol{x}_k|=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\to+\infty$，所以$\{\boldsymbol{x}_k\}$不收敛。

13. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$为紧集，证明$\mathbf{E}\bigcap\mathbf{F}$和$\mathbf{E}\bigcup\mathbf{F}$为紧集。

证 因为$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$为紧集，所以$\mathbf{E},\mathbf{F}$为有界闭集，于是可知$\mathbf{E}\bigcap\mathbf{F}$和$\mathbf{E}\bigcup\mathbf{F}$也都是有界闭集，即紧集。

14. 用定义证明点集 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\, k=1,2,\cdots\right\}$是$\mathbf{R}$中的紧集。

证 假定$\{U_\alpha\}$为点集 $\boldsymbol{S}=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\, k=1,2,\cdots\right\}$的任一开覆盖。设$0\in U_{\alpha_0}$，则$\exists\delta>0:O(0,\delta)\subset U_{\alpha_0}$，于是当$k>\frac{1}{\delta}$时，$\frac{1}{k}\in U_{\alpha_0}$。对于$\left\{\frac{1}{k}\middle|\ k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]\right\}$，存在$\{U_\alpha\}$中$U_{\alpha_k}$，使得$\frac{1}{k}\in U_{\alpha_k}$，$k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]$。于是

$\left\{U_{\alpha_0},U_{\alpha_k}\middle|\ k=0,1,\cdots,[\frac{1}{\delta}]\right\}$构成 $\boldsymbol{S}$ 的有限开覆盖，所以 $\boldsymbol{S}$ 为紧集。

15. 应用 Heine-Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集必有聚点。

证 假定 $\boldsymbol{S}$ 为$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集，则由习题 9，$\bar{\mathrm{S}}=\mathrm{S}\cup\mathrm{S}'$必是闭集。如果 $\boldsymbol{S}$ 无聚点，即$\mathrm{S}'=\varnothing$，则 $\boldsymbol{S}$ 为$\bar{\mathrm{S}}=\mathrm{S}$，即 $\boldsymbol{S}$ 为有界闭集，从而由 Heine-Borel 定理知 $\boldsymbol{S}$ 为$\mathbf{R}^n$ 上的紧集。

$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$，由于 $\boldsymbol{x}$ 不是 $\boldsymbol{S}$ 的聚点，存在$O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$只含有 $\boldsymbol{S}$ 中有限个点。显然$\{O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\}$构成为 $\boldsymbol{S}$ 的一个开覆盖，但由于其中有限个$O(\boldsymbol{x},\delta_{\boldsymbol{x}})$只能包含 $\boldsymbol{S}$ 中有限个点，因而不存在 $\boldsymbol{S}$ 的有限开覆盖，矛盾！所以 $\boldsymbol{S}$ 必有聚点。