习　题　13.2　重积分的性质与计算

1．证明重积分的性质 8。

证 不妨设 $g(x)\ge 0$，M、m 分别是 $f(x)$ 在区域 Ω 上的上确界、下确界，由 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$、性质 1 和性质 3，可得

$$m\int_{\Omega} g(x)dV \le \int_{\Omega} f(x)g(x)dV \le M\int_{\Omega} g(x)dV，$$

当 $\int_{\Omega} g(x)dV=0$，积分中值定理显然成立。当 $\int_{\Omega} g(x)dV\ne 0$，则

$$m\le \frac{\int_{\Omega} f(x)g(x)dV}{\int_{\Omega} g(x)dV}\le M，$$

所以存在 $\mu\in[m,M]$，使得

$$\frac{\int_{\Omega} f(x)g(x)dV}{\int_{\Omega} g(x)dV}=\mu，$$

即

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dV=\mu\int_{\Omega} g(x)dV。$$

如果 f 在有界闭区域 Ω 上连续，由介值定理，存在 $\xi\in\Omega$，使得 $f(\xi)=\mu$，所以

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dV=f(\xi)\int_{\Omega} g(x)dV。$$

2．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^2dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^3dxdy$，其中 **D** 为 x 轴，y 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\ln(x+y)dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}[\ln(x+y)]^2dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$。

解（1）因为在 **D** 上成立 $0<x+y<1$，所以 $(x+y)^2>(x+y)^3$，于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^2dxdy>\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^3dxdy。$$

（2）因为在 **D** 上成立 $x+y\ge 3$，所以 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$，于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}}\ln(x+y)dxdy<\iint\limits_{\mathbf{D}}[\ln(x+y)]^2dxdy。$$

3．用重积分的性质估计下列重积分的值：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy(x+y)dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，其中 **D** 为区域 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdxdz}{1+x^2+y^2+z^2}$，其中 Ω 为单位球 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$。

解（1）因为在 **D** 上成立 $0\le xy(x+y)\le 2$，所以

$$0\le\iint\limits_{\mathbf{D}}xy(x+y)dxdy\le 2。$$

（2）因为在 **D** 上成立 $\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$，所以

$$\frac{100}{51}\le\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le 2。$$

（3）因为在 Ω 上成立 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\le 1$，所以

$$\frac{2}{3}\pi\le\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdxdz}{1+x^2+y^2+z^2}\le\frac{4}{3}\pi。$$

4．计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^3+3x^2y+y^3)dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 **D** 为闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中 Ω 为长方体 $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$。

解（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^3+3x^2y+y^3)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx$

$$=\int_0^1(\frac{1}{4}+y+y^3)dy=1。$$

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy=\int_a^b xe^{x^2}dx\int_c^d ye^{y^2}dy=\frac{1}{4}\left(e^{b^2}-e^{a^2}\right)\left(e^{d^2}-e^{c^2}\right)$。

（3）$\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$

$$=\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2\frac{dz}{(x+y+z)^3}=-\frac{1}{2}\int_1^2 dx\int_1^2\left(\frac{1}{(x+y+2)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}。$$

5．在下列积分中改变累次积分的次序：

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy\qquad(a<b)$；

(2) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy\qquad(a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$；

(4) $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$；

(5) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$（改成先 y 方向，再 x 方向和 z 方向的次

序积分）；

(6) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$ （改成先 x 方向，再 y 方向和 z 方向的次序积分）。

解（1） $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx$。

（2） $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy$

$$=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx。$$

（3） $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$。

（4） $\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)dy$。

（5） $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$

$$=\int_0^1 dz\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy-\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_0^{z-x}f(x,y,z)dy。$$

注：也可写成 $\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy$。

（6）

$$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx。$$

6． 计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy^2dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}\quad(a>0)$，其中 $\mathbf{D}$ 为圆心在 (a,a)，半径为 a 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域；

(3) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\mathrm{e}^{x+y}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为区域 $\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$；

(4) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^2+y^2)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,y=x+a,y=a$ 和 $y=3a\ (a>0)$ 所围的区域；

(5) $\iint\limits_{\mathbf{D}}ydxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围的区域；

(6) $\iint\limits_{\mathbf{D}}y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,\ y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域；

(7) $\iint\limits_{\mathbf{D}}x^2ydxdy$，其中 $\mathbf{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 2x,1\le x\le 2,0\le y\le x\}$；

(8) $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$，其中 Ω 为曲面 $z=xy$，平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域；

(9) $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0,\ z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

(10) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围的区域；

(11) $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

$(R>0)$ 的公共部分；

（12）$\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz$，其中 Ω 为椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$。

解（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}} xy^2dxdy=\int_{-p}^{p}y^2dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}xdx=\dfrac{1}{8}\int_{-p}^{p}y^2(p^2-\dfrac{y^4}{p^2})dy=\dfrac{1}{21}p^5$。

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \dfrac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\dfrac{dx}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}dy=\int_0^a\left(\dfrac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)dx$

$=(2\sqrt{2}-\dfrac{8}{3})a^{\frac{3}{2}}$。

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \mathrm{e}^{x+y}\,dxdy=\int_{-1}^{0}e^xdx\int_{-1-x}^{1+x}e^ydy+\int_0^1e^xdx\int_{x-1}^{1-x}e^ydy=e-\dfrac{1}{e}$。

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x^2+y^2)dxdy=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx$

$=\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\dfrac{1}{3}a^3)dy=14a^4$。

（5）$\iint\limits_{\mathbf{D}} ydxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}ydy=\dfrac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\dfrac{5\pi}{2}a^3$。

（6）$\iint\limits_{\mathbf{D}} y\left[1+x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy=\int_{-1}^{1}ydy\int_y^1\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dx$

$=\int_{-1}^{1}\left(y-y^2+\dfrac{1}{2}y(e^{\frac{y^2+1}{2}}-e^{y^2}\right)dy=-\int_{-1}^{1}y^2dy=-\dfrac{2}{3}$。

（7）$\iint\limits_{\mathbf{D}} x^2ydxdy=\int_1^2x^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}ydy=\int_1^2x^2(x^2-x)dx=\dfrac{49}{20}$。

（8）$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz=\int_0^1xdx\int_0^xy^2dy\int_0^{xy}z^3dz=\dfrac{1}{4}\int_0^1x^5dx\int_0^xy^6dy=\dfrac{1}{364}$。

(9) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\dfrac{dz}{(1+x+y+z)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}\text{。}$$

(10) $\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\int_0^h zdz\iint\limits_{\Omega_z}dxdy=\pi\int_0^h z^2dz=\dfrac{1}{3}\pi h^3$。

(11) $\iiint_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^R z^2dz\iint_{\Omega_z}dxdy$

$$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)dz+\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2(R^2-z^2)dz=\frac{59}{480}\pi R^5\text{。}$$

(12) $\iiint_{\Omega}x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{\Omega_x}dydz$

$$=\pi bc\int_{-a}^{a}x^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc\text{。}$$

7．设平面薄片所占的区域是由直线$x+y=2, y=x$和x轴所围成，它的面密度为$\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这个薄片的质量。

解　设薄片的质量为m，则

$$m=\iint\limits_{D}\rho(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx$$

$$=\int_0^1(\frac{8}{3}-4y+4y^2-\frac{8}{3}y^3)dy=\frac{4}{3}\text{。}$$

8. 求抛物线$y^2=2px+p^2$与$y^2=-2qx+q^2\quad(p,q>0)$所围图形的面积。

解 联立两个抛物线方程，解得$x=\dfrac{q-p}{2}, y=\pm\sqrt{pq}$，于是两抛物线所围的面积为

$$S=\int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}}dy\int_{\frac{y^2}{2p}-\frac{p}{2}}^{\frac{q}{2}-\frac{y^2}{2q}}dx=\int_0^{\sqrt{pa}}[(p+q)-\frac{p+q}{pq}y^2]dy=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}\text{。}$$

9. 求四张平面$x=0, y=0, x=1, y=1$所围成的柱体被平面$z=0$和$2x+3y+z=6$截的的立体的体积。

解 设$D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，利用对称性，有

$$\iint\limits_{D}xdxdy=\iint\limits_{D}ydxdy\text{，}$$

于是

$$V=\iint\limits_{D}(6-2x-3y)dxdy=6-5\int_0^1 dx\int_0^1 ydy=\frac{7}{2}\text{。}$$

10. 求柱面$y^2+z^2=1$与三张平面$x=0, y=x, z=0$所围的在第一卦限的立体的体积。

解 设D是所围空间区域在xy平面的投影，则

$$D=\{(x,y)|0\le x\le y,0\le y\le 1\}，$$

于是

$$V=\iint_D\sqrt{1-y^2}dxdy=\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy\int_0^y dx=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy=\frac{1}{3}。$$

11．求旋转抛物面$z=x^2+y^2$，三个坐标平面及平面$x+y=1$所围有界区域的体积。

解 设D是所围空间区域在xy平面的投影，则

$$D=\{(x,y)|x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}，$$

于是

$$V=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=2\iint_D x^2dxdy=2\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}dy=\frac{1}{6}。$$

12．设$f(x)$在$\mathbf{R}$上连续，a,b为常数。证明

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)(b-y)dy$ ；

(2) $\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a(a-x)e^{(a-x)}f(x)dx$ （$a>0$）。

证（1）交换积分次序，则得到

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)dy\int_y^b dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy。$$

（2）交换积分次序，则得到

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a e^{(a-x)}f(x)dx\int_x^a dy=\int_0^a(a-x)e^{(a-x)}f(x)dx。$$

13．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1(e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

证 交换积分次序，则得到

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}e^y f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx\int_{x^2}^x e^y dy=\int_0^1(e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

14．设$\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$，证明

$$1\le\iint_{\mathbf{D}}\left[\sin(x^2)+\cos(y^2)\right]dxdy\le\sqrt{2}。$$

证

$$\iint_D[\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy=\int_0^1\sin(x^2)dx\int_0^1 dy+\int_0^1\cos(y^2)dy\int_0^1 dx$$

$$=\int_0^1\sin(x^2)dx+\int_0^1\cos(y^2)dy=\int_0^1[\sin(x^2)+\cos(x^2)]dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\sin(x^2+\frac{\pi}{4})dx。$$

当$x\in[0,1]$时，成立

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1，$$

所以

$$1 \le \iint\limits_{\mathbf{D}} \left[\sin(x^2) + \cos(y^2)\right] dxdy \le \sqrt{2} \text{。}$$

15．设 $\mathbf{D} = [0,1] \times [0,1]$，利用不等式 $1 - \dfrac{t^2}{2} \le \cos t \le 1$ （$|t| \le \pi/2$）证明

$$\frac{49}{50} \le \iint\limits_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy \le 1 \text{。}$$

证 由

$$1 - \frac{(xy)^4}{2} \le \cos(xy)^2 \le 1 \text{，}$$

易知

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy \le 1 \text{，}$$

另一方面，由于

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} [1 - \frac{(xy)^4}{2}] dxdy = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx \int_0^1 y^4 dy = \frac{49}{50} \text{，}$$

所以

$$\frac{49}{50} \le \iint\limits_{\mathbf{D}} \cos(xy)^2 dxdy \text{。}$$

16. 设 $\mathbf{D}$ 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，$\mathbf{D}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y，(α, β) 是 $\mathbf{D}$ 内任意一点。证明

(1) $\left|\iint\limits_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le l_x l_y m\mathbf{D}$ ；

(2) $\left|\iint\limits_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \dfrac{l_x{}^2 l_y{}^2}{4}$。

证（1）

$$\left|\iint\limits_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \iint\limits_{\mathbf{D}} |x-\alpha||y-\beta| dxdy$$

$$\le l_x l_y \iint\limits_{\mathbf{D}} dxdy = l_x l_y m\mathbf{D} \text{。}$$

（2）设 $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{D}' = [a,b] \times [c,d]$，且 $b - a = l_x,\ d - c = l_y$。则

$$\left|\iint\limits_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy\right| \le \iint\limits_{\mathbf{D}} |(x-\alpha)(y-\beta)| dxdy$$

$$\le \iint\limits_{\mathbf{D}'} |x-\alpha||y-\beta| dxdy = \int_a^b |x-\alpha| dx \int_c^d |y-\beta| dy \text{，}$$

由于 $\alpha \in [a,b]$，于是

$$\int_a^b |x-\alpha| dx = -\int_a^\alpha (x-\alpha) dx + \int_\alpha^b (x-\alpha) dx = \frac{1}{2}[(\alpha-a)^2 + (b-\alpha)^2] \text{，}$$

$$= \frac{1}{2}[(b-\alpha)+(\alpha-a)]^2 - (b-\alpha)(\alpha-a) \le \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}l_x^2 \text{，}$$

同理可得

$$\int_c^d |y-\beta| dy \le \frac{1}{2} l_y^2,$$

所以

$$\left| \iint_{\mathbf{D}} (x-\alpha)(y-\beta) dxdy \right| \le \frac{{l_x}^2 {l_y}^2}{4}。$$

17．利用重积分的性质和计算方法证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 dx。$$

证 由于

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 = \iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy \le \frac{1}{2} \iint_{[a,b]\times[a,b]} \left(f^2(x)+f^2(y)\right)dxdy,$$

由对称性，

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \left(f^2(x)+f^2(y)\right)dxdy = 2\iint_{[a,b]\times[a,b]} f^2(x)dxdy$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b dy = 2(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

所以

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 dx。$$

18．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \mathrm{e}^{f(x)-f(y)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ge (b-a)^2。$$

证明一 将区间 $[a,b]$ n 等分，并取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} e^{f(x)-f(y)}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)}\right\},$$

再利用不等式：当 $x_i > 0$ （$i = 1,2,\cdots,n$）时成立

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2,$$

（注：上述不等式可由算术平均不小于几何平均得到）

就有

$$\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^n e^{f(\xi_i)} \cdot \sum_{i=1}^n e^{-f(\xi_i)} \ge (b-a)^2,$$

所以

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \mathrm{e}^{f(x)-f(y)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ge (b-a)^2。$$

证明二 设 $\mathbf{D} = [a,b]\times[a,b]$，由对称性，有

$$\iint_{\mathbf{D}} e^{f(x)-f(y)}dxdy = \iint_{\mathbf{D}} e^{f(y)-f(x)}dxdy,$$

于是

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{f(x)-f(y)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{D}}[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}]dxdy\geq\iint\limits_{\mathbf{D}}dxdy=(b-a)^2。$$

19．设 $\mathbf{\Omega}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,0\leq x_i\leq 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$，计算下列 n 重积分：

(1) $\int\limits_{\Omega}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$ ；

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$ 。

解（1） $\int\limits_{\Omega}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=n\int\limits_{\Omega}x_1^2dx_1dx_2\cdots dx_n=n\int_0^1x_1^2dx_1\int_0^1dx_2\cdots\int_0^1dx_n=\frac{n}{3}。$$

（2） $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_ix_jdx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_i^2dx_1dx_2\cdots dx_n+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\int\limits_{\Omega}x_ix_jdx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{4}=\frac{n}{3}+\frac{1}{4}n(n-1)=\frac{n(3n+1)}{12}。$$