习题　11.2　多元连续函数

1．　确定下列函数的自然定义域：

(1)　$u=\ln(y-x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ；　　(2)　$u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$ ；

(3)　$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\quad (R>r)$ ；

(4)　$u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$。

解 (1)　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,\ y>x\}$。

(2)　$D=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$。

(3)　$D=\{(x,y,z)\mid r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\}$。

(4)　$D=\{(x,y,z)\mid |z|\le x^2+y^2,\ x^2+y^2\ne 0\}$。

2．设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\quad (x>0)$，求 $f(x)$。

解　因为

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ 。$$

3．　若函数

$$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$，求 $f(x)$ 和 $z(x,y)$。

解 由 $z(x,4)=\sqrt{4}+f(\sqrt{x}-1)=x+1$，可得

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1+1)^2-1,$$

所以

$$f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x,$$

$$z(x,y)=x+\sqrt{y}-1。$$

4．　讨论下列函数当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时的极限是否存在：

（1） $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ ；　　　　（2） $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ；

（3） $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ 0 & \text{其它点};\end{cases}$ 　　　　（4） $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$。

解（1）由于 $f(x,kx)=\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（2） $f(x,kx)=\dfrac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（3）由于 $f(x,\dfrac{x^2}{2})=1$，所以当 (x,y) 沿曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 1，而当 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 0，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

（4）利用平均值不等式

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^4+y^8}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8}\text{，}$$

可得

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3y^3|}{x^4+y^8}\le\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\frac{|xy|^3}{|xy|^{\frac{8}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}|xy|^{\frac{1}{3}}\to 0,((x,y)\to(0,0))\text{，}$$

所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限存在且为 0。

5．　对多元函数证明极限唯一性，局部有界性，局部保序性和局部夹逼性。

证　（1）假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=A， $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=B，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}\ (0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon\text{，}$$

$$\exists\delta_2>0,\forall\boldsymbol{x}\ (0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|f(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon\text{。}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立

$$|A-B|\le|f(\boldsymbol{x})-A|+|f(\boldsymbol{x})-B|<2\varepsilon\text{，}$$

由于 ε 为任意正数，所以 A=B，即极限唯一。

（2）假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})$=A，则对于 $\varepsilon=1$，

$$\exists\delta>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta):|f(\boldsymbol{x})-A|<1\text{，}$$

即

$$|f(\boldsymbol{x})|<|A|+1\text{。}$$

所以 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的某个去心领域有界。

(3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x})$=A> $\lim\limits_{x\to x_0} g(\boldsymbol{x})$=B，则对于 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon\text{，}$$

即

$$f(\boldsymbol{x})>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}\text{。}$$

又

$$\exists\delta_2>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|g(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon\text{，}$$

即

$$g(\boldsymbol{x})<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立局部保序性：

$$g(\boldsymbol{x})<\frac{A+B}{2}<f(\boldsymbol{x})\text{。}$$

(4)假定存在 $\rho>0$，使当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\rho$ 时成立

$$g(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le h(\boldsymbol{x})\text{，}$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{x\to x_0} h(\boldsymbol{x})$=A。

$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} h(\boldsymbol{x})$=A，

$$\exists\delta_1>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|h(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon\text{，}$$

所以

$$h(\boldsymbol{x})<A+\varepsilon\text{。}$$

又由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(\boldsymbol{x})$ =A，

$$\exists\delta_2>0,\forall \boldsymbol{x}\,(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|g(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon\text{，}$$

所以

$$g(\boldsymbol{x})>A-\varepsilon\text{。}$$

取 $\delta=\min\{\rho,\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立

$$A-\varepsilon<g(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le h(\boldsymbol{x})<A+\varepsilon\text{，}$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x})$=A。

6. 对多元函数证明极限的四则运算法则：假设当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 的极限存在，则

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x}))=\lim\limits_{x\to x_0} f(\boldsymbol{x})\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(\boldsymbol{x})$；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ （$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$）。

证 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=B。则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_1):|f(x)-A|<\varepsilon,$$
$$\exists\delta_2>0,\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta_2):|g(x)-B|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\le|f(x)-A|+|g(x)-B|<2\varepsilon,$$

所以（1）成立。

由于 $g(x)$ 在 x_0 有极限，所以 $g(x)$ 在 x_0 局部有界，即存在正数 X 和 $\delta'>0$，$\forall x\ (0<|x-x_0|<\delta'):|g(x)|<X$。取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$|f(x)g(x)-AB|\le|f(x)g(x)-Ag(x)|+|Ag(x)-AB|$$
$$<(X+|A|)\varepsilon,$$

所以（2）成立。

由于 B≠0，$\forall\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{|B|}{2}\right)$，$\exists\delta''>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta'')$：

$$|g(x)|>|B|-\varepsilon\ge\frac{|B|}{2}。$$

取 $\delta=\min\{\delta'',\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|\le\left|\frac{B(f(x)-A)-A(g(x)-B)}{Bg(x)}\right|$$
$$<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\varepsilon,$$

所以（3）成立。

7. 求下列各极限：

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$； （2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$； （4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；

（5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$； （6） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

（7） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$； （8） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

解 （1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1-xy)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(x^2+y^2)}=1$。

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0, \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty。$$

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}$。

（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)=2$。

（5） $\ln(x^2+e^{y^2})=\ln(1+x^2+e^{y^2}-1)=x^2+y^2+o(y^2)=x^2+y^2+o(x^2+y^2)$，

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}=1。$$

（6） $|\sin(x^3+y^3)|\le|x^3+y^3|=|x+y||x^2+y^2-xy|\le 2|x+y||x^2+y^2|$，

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0。$$

（7）因为

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\quad\big((x,y)\to(0,0)\big),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}\ge\frac{1}{|xy|},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{|xy|}=+\infty,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}=+\infty。$$

（8） $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[(x^2e^{-x})e^{-y}\right]+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left[(y^2e^{-y})e^{-x}\right]=0$。

8. 讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$。

解 (1) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=x+kx^2}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4(1+kx)^2}{x^4(1+kx)^2+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。

由 $\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=\dfrac{0}{y^2}=0,\quad y\neq0$，可知 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=0$。同理可知 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=0$。所以二次极限存在且都等于 0。

(2) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+x^2)-k^2x^2(1+k^2x^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。又

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=-\lim_{y\to0}(1+y^2)=-1,$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1。$$

所以二次极限都存在但不相等。

(3) 由于 $|f(x,y)|\le|x|+|y|$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)=0$。

由于 $\lim\limits_{x\to0} y\sin\dfrac{1}{x}\quad(y\neq0)$ 和 $\lim\limits_{y\to0} x\sin\dfrac{1}{y}\quad(x\neq0)$ 都不存在，所以两个二次极限都不存在。

9．验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right), & x>0\text{ 且 }\dfrac{1}{2}x^2<y\le x^2,\\ \dfrac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0\text{ 且 }x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其它点}\end{cases}$$

在原点不连续，而在其它点连续。

证 设 $x>0$， $f(x,x^2)=\dfrac{2}{x^2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=1$，所以当点 (x,y) 沿 $y=x^2\ (x>0)$ 趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 1，而当点 (x,y) 沿 x 轴趋于原点时函数 $f(x,y)$ 的极限为 0，所以函数 $f(x,y)$ 在原点不连续。

对于函数 $f(x,y)$ 在其它点的连续性只要考虑函数在下述曲线

$$y=\frac{1}{2}x^2, y=x^2, y=2x^2 \quad (x>0)$$

上的情况（因为在除去上述曲线和原点的区域上函数显然连续）。

设 $x_0>0$。在 $(x_0,y_0)=(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2)$ 点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2/2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2(y-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=0=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\le x^2/2}} f(x,y)=0=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2)$ 连续。同理可知函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,2x_0^2)$ 也连续。

在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 2x^2>y>x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2x^2-y}{x^2}=\frac{2x_0^2-x_0^2}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2/2<y\le x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2(y-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}=\frac{2(x_0^2-\frac{1}{2}x_0^2)}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$ 也连续。

综上所述，函数 $f(x,y)$ 除了在原点不连续，在其它点都连续。

10．讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围。

解　显然函数$f(x,y)$在区域$\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\neq 0\right\}$上连续，所以只要考虑函数$f(x,y)$在原点的连续性。由$|x^2y|\le\frac{1}{2}|x|(x^2+y^2)$，得到

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

即函数在原点也连续。因此函数$f(x,y)$在平面上点点连续。

11．设$f(t)$在区间(a,b)上具有连续导数，$\mathbf{D}=(a,b)\times(a,b)$。定义$\mathbf{D}$上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y.\end{cases}$$

证明：对于任何$c\in(a,b)$成立

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)} F(x,y)=f'(c)。$$

证　由题设，利用 Lagrange 中值定理　$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，其中ξ介于x和y之间。所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x\neq y}} F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(c,c)} f'(\xi)=f'(c),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x=y}} F(x,y)=\lim_{x\to c} f'(x)=f'(c),$$

综合上面两式可得

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)} F(x,y)=f'(c)。$$

12．设二元函数$f(x,y)$在开集$\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$内对于变量$x$是连续的，对于变量$y$满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|,$$

其中$(x,y'),(x,y'')\in\mathbf{D}$，$L$为常数（通常称为 Lipschitz 常数）。证明$f(x,y)$在$\mathbf{D}$内连续。

证　假设$(x_0,y_0)\in\mathbf{D}$，由于函数对于变量x是连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0,\forall x(|x-x_0|<\delta)$，成立

$$\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon。$$

当$\left|(x,y)-(x_0,y_0)\right|<\min(\delta,\varepsilon)$时

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|\le\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|+\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|$$

$$\le L\left|y-y_0\right|+\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|$$

$$\le L\varepsilon+\varepsilon,$$

所以$f(x,y)$在(x_0,y_0)内连续，证毕。

13．证明：若$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$是$\mathbf{D}$上的连续映射，则映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 与函数<$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$>在$\mathbf{D}$上都是连续的。

证 假设$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{D}$，由$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$是连续，$\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$，成立$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，

$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1)$，成立$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，

于是

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))|$$

$$\le|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|\le2\varepsilon,$$

所以映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$连续。又

$$|<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})>-<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)>|$$

$$=|<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})>+<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)>|$$

$$\le|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|\varepsilon+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|\varepsilon,$$

由于$\boldsymbol{g}$连续，所以$\boldsymbol{g}$的每个分量都连续，从而都局部有界，于是$\boldsymbol{g}$也局部有界。根据上式，<$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$>在$\boldsymbol{x}_0$连续，证毕。

14．证明复合映射的连续性定理（定理 11.2.3）。

证 假设$\boldsymbol{g}$在D上连续，$\boldsymbol{f}$在Ω上连续，并且$\boldsymbol{x}_0\in D,\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\Omega$。由$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{u}_0$上连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall\boldsymbol{u}(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|<\eta)$成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)|<\varepsilon。$$

对于上述$\eta>0$，由 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续知$\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$成立

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\eta。$$

于是，当$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$时，

$$|\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)|<\varepsilon，$$

所以复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续。