习　题　15.2　含参变量的反常积分

1.　证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$，$y\ge a>0$；　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$，$0\le\alpha\le\alpha_0$；

（3）$\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x dx$，　$a\le\alpha\le b$。

解　（1）因为 $\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+a^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛。

（2）$\left|\int_0^A\sin 2xdx\right|\le 1$，即 $\int_0^A\sin 2xdx$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致有界；$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 x 单调，且由 $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}\right|\le\frac{1}{x}$，可知当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致趋于零。于是由 Dirichlet 判别法，可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$ 在 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 上一致收敛。

（3）由分部积分法，

$$\int_A^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha xdx=-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}d\cos x^4$$

$$=-\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{4x^2}\Bigg|_A^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx,$$

其中

$$\left|\frac{\cos\alpha x\cos x}{x^2}\Bigg|_A^{+\infty}\right|\le\frac{1}{A^2};$$

再由 $\left|\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}\right|\le\frac{\max(|a|,|b|)}{x^2}$ 及 $\left|\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$，可得到

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx\right|\le\max(|a|,|b|)\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{\max(|a|,|b|)}{A}$$

与

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx\right|\le\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2A^2}。$$

当 $A\to+\infty$ 时，上述三式关于 α 在 $[a,b]$ 上一致趋于零，所以原积分关于 α 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

2．说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$，$0<\alpha<+\infty$；　　　（2）$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$，$0<\alpha<2$。

解（1）取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{18}>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=\frac{n\pi}{4}>A_0, A''=\frac{3n\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n}$，

则当n充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx\right|=\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}dx\geq\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+(\frac{3n\pi}{4})^2\right)}>\frac{\sqrt{2}}{18}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$在$\alpha\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

（2）作变量代换$x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t dt\text{。}$$

取$\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=2n\pi+\frac{\pi}{4}>A_0, A''=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$，

$\alpha=\alpha_n=2-\frac{1}{n}$，则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t dt\right|=\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin t dt\geq\frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}}>\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$在$\alpha\in(0,2)$上不一致收敛。

3．设$f(t)$在$t>0$上连续，反常积分$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$当$\lambda=a$与$\lambda=b$时都收敛，证明$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

证　将反常积分$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$写成

$$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt+\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt\text{。}$$

对于$\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt$，因为$\int_0^1 t^a f(t)dt$收敛从而关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛，$t^{\lambda-a}$是$t$的单调函数，且$\left|t^{\lambda-a}\right|\leq 1$，即$t^{\lambda-a}$在$t\in[0,1]$上关于$\lambda\in[a,b]$一致有界，由 Abel 判别法，可知$\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

对于$\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$，因为$\int_1^{+\infty}t^b f(t)dt$收敛从而关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛，$t^{\lambda-b}$是$t$的单调函数，且$\left|t^{\lambda-b}\right|\leq 1$，即$t^{\lambda-b}$在$t\in[1,+\infty)$上关于

$\lambda\in[a,b]$一致有界，由 Abel 判别法，可知$\int_1^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

所以$\int_0^{+\infty}t^{\lambda}f(t)dt$关于$\lambda$在$[a,b]$上一致收敛。

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，在$y\ge y_0>0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，在（I）$a<\alpha<b$；（II）$-\infty<\alpha<+\infty$；

（3）$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$，在（I）$p\ge p_0>0$；（II）$p>0$；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$，在（I）$\alpha\ge\alpha_0>0$；（II）$\alpha>0$；

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，

对于$\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于$\left|\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，可知$\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y$一致收敛。

对于$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于$\left|\int_1^A\cos xydx\right|\le\frac{2}{y_0}$，即$\int_1^A\cos xydx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致有界，以及$\frac{1}{\sqrt{x}}$单调，当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{x}}$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致趋于零，由 Dirichlet 判别法，可知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致收敛，

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$关于$y\in[y_0,+\infty)$一致收敛。

（2）（I）当$a<\alpha<b$，取$A>0$，使$(a,b)\subset[-A,A]$。则$\forall|x|\ge A$，$\left|e^{-(x-\alpha)^2}\right|\le e^{-(|x|-A)^2}$，而$\int_{-\infty}^{-A}e^{-(|x|-A)^2}dx$与$\int_A^{+\infty}e^{-(|x|-A)^2}dx$收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分$\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$与$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(a,b)$上一致收敛。所以$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(a,b)$上一致收敛。

（II）当$-\infty<\alpha<+\infty$，对于$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，取$\varepsilon_0=\frac{1}{e}>0$，$\forall A_0>0$，取$A'=n>A_0,A''=n+1$，$\alpha=\alpha_n=n$，则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}e^{-(x-\alpha)^2}dx\right|=\int_n^{n+1}e^{-(x-\alpha_n)^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx>\frac{1}{e}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。同理$\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$在$\alpha\in(-\infty,+\infty)$上也不一致收敛。所以$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$在

$\alpha\in(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。

（3）（I）当$p\ge p_0>0$，$\left|x^{p-1}\ln^2 x\right|\le x^{p_0-1}\ln^2 x$，而$\int_0^1 x^{p_0-1}\ln^2 xdx$收敛，由Weierstrass判别法，$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$在$p\in[p_0,+\infty)$上一致收敛。

（II）当$p>0$，取$p_n=\dfrac{1}{n}>0$，由于

$$\left|\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{p_n-1}\ln^2 xdx\right|\ge \ln^2\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1}dx=n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)\ln^2\frac{1}{n}\to+\infty(p\to+0),$$

由Cauchy收敛准则，可知$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$在$p\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

（4）（I）当$\alpha\ge\alpha_0>0$，$\left|e^{-\alpha x}\sin x\right|\le e^{-\alpha_0 x}\ (x\ge 0)$，而$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$收敛，由Weierstrass判别法，$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$在$\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛。

（II）当$\alpha>0$，取$\varepsilon_0=2e^{-\pi}$，$\forall A>0$，取$A'=n\pi>A, A''=(n+1)\pi$，$\alpha=\alpha_n=\dfrac{1}{n+1}$，则当$n$充分大时，

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\alpha_n x}\sin xdx\right|\ge 2e^{-\pi}=\varepsilon_0,$$

由Cauchy收敛准则，$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$在$\alpha\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

5. 证明函数$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$在$(0,+\infty)$上连续。

证 任取$[a,b]\subset(0,+\infty)$，$\left|\int_1^A\cos xdx\right|\le 2$，即$\int_1^A\cos xdx$关于$\alpha\in[a,b]$一致有界；$\dfrac{1}{x^\alpha}$关于$x$单调，且$\forall\alpha\in[a,b]$成立$\dfrac{1}{x^\alpha}\le\dfrac{1}{x^a}$，所以当$x\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x^\alpha}$关于$\alpha\in[a,b]$一致趋于零。由Dirichlet判别法，可知$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$在$\alpha\in[a,b]$上一致收敛，从而$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$在$[a,b]$上连续，由$a,b$的任意性，即知$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$在$(0,+\infty)$上连续。

6. 确定函数$F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$的连续范围。

解 函数$F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$的定义域为$(0,2)$。下面我们证明$F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$在$(0,2)$上内闭一致收敛，即$\forall\eta>0$，$F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$在$y\in[\eta,2-\eta]$上一致收敛，从而得到$F(y)$在$(0,2)$上的连续性。

由于积分有两个奇点，所以将 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 写成

$$F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx=F_1(y)+F_2(y)\text{。}$$

当 $x\in(0,1)$，$y\le 2-\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\le\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}$，而 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

当 $x\in(\pi-1,\pi)$，$y\ge\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\le\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}$，而 $\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_2(y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

所以 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

7. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 存在。证明 $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

证 由于 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛即关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，e^{-sx} 关于 x 单调，且 $\left|e^{-sx}\right|\le 1$，即 e^{-sx} 在 $x\in[0,+\infty),s\in[0,+\infty)$ 上一致有界，由 Abel 判别法，$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $s\in[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $F(s)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

8. 证明函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微。

证 首先反常积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$ 收敛。其次有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]dx=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{\left[1+(x+t)^2\right]^2}\cos xdx\text{。}$$

任取 $[a,b]$，$\forall A>0$，$\left|\int_0^A\cos xdx\right|\le 2$，即 $\int_0^A\cos xdx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致有界；记 $c=\max\{|a|,|b|\}$，当 $x>c$，$t\in[a,b]$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 x 单调，且 $\left|\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\right|\le\frac{1}{1+(x-c)^2}$，即当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，可知 $-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos xdx$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛，所以 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $t\in[a,b]$ 上可微，且有

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)\cos x}{[1+(x+t)^2]^2}dx。$$

由a,b的任意性，即知$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$在$(-\infty,+\infty)$上可微。

9. 利用$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$，计算$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$　（$b>a>0$）。

解　当$y\in[a,b]$时，$\left|e^{-xy}\right|\le e^{-ax}$，而$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$收敛，所以$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$关于$y\in[a,b]$一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}。$$

10．利用$\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$，计算$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$　（$p>0$，$b>a>0$）。

解　当$y\in[a,b]$时，$\left|\int_0^A\cos xydx\right|\le\frac{2}{a}$，即$\int_0^A\cos xydx$关于$y\in[a,b]$一致有界；$e^{-px}$关于$x$单调，且当$x\to+\infty$时，$e^{-px}$关于$y$一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx$关于$y\in[a,b]$一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-px}dx\int_a^b\cos(xy)dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)dx。$$

利用分部积分，

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos(xy)dx=\frac{p}{p^2+y^2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}。$$

11．利用$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$　（$a>0$），计算$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$　（n为正整数）。

解　由于$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$对一切$a\in(0,+\infty)$收敛，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{-dx}{\left(a+x^2\right)^2}$关于$a$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛，因此$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}$在$a\in(0,+\infty)$上可微且成立

$$\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^2},$$

所以

$$I_2=-\frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)。$$

同理上述积分仍可在积分号下求导，并可不断进行下去。由

$$\frac{d^n}{da^n}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-\frac{1}{2}-n}$$

与

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{(a+x^2)^{n+1}}，$$

即可得到

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi。$$

12．计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$。

解 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\arctan\alpha x d\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}dx$。

在最后一个积分中，令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^2}{(1+t^2)(1+\alpha^2+\alpha^2x^2)}dt\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\alpha\int_0^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right]。\end{aligned}$$

13．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad（a,b>0）。$$

证 设 $A''>A'>0$，

$$\begin{aligned}&\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}dx\\&=\int_{aA'}^{aA''}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{bA'}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(bx)}{x}dx\\&=[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a}，\end{aligned}$$

最后一个等式利用了积分中值定理，其中 ξ_1 在 aA' 与 bA' 之间，ξ_2 在 aA'' 与 bA'' 之间。令 $A'\to+0$，$A''\to+\infty$，则 $\xi_1\to 0,\xi_2\to+\infty$，由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}。$$

14．（1）利用 $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$ （$c>0$）；

（2）利用积分号下求导的方法引出 $\frac{dL}{dc}=-2L$，以此推出与（1）同样的结果，并计算 $\int_0^{+\infty} e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy$ （$a>0, b>0$）。

解（1）令 $y=\frac{c}{t}$，则

$$L(c)=\int_0^{+\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}\frac{c}{t^2}dt=\int_0^{+\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{c}{y^2}dy,$$

于是

$$2L(c)=\int_0^{+\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\left(1+\frac{c}{y^2}\right)dy=\int_0^{+\infty} e^{-(y-\frac{c}{y})^2-2c}d(y-\frac{c}{y})。$$

再令 $y-\frac{c}{y}=x$，得到

$$L(c)=\int_0^{+\infty} e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{e^{-2c}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}。$$

（2）利用积分号下求导，

$$\frac{dL}{dc}=-2c\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=-2L,$$

于是

$$\frac{dL}{L}=-2dc,$$

对等式两边积分，得到

$$L(c)=L_0e^{-2c},$$

注意到 $L(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以

$$L(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}。$$

令 $t=\sqrt{a}y$，得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{ab}{t^2}}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}。$$

15．利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\frac{1}{\alpha^2+x^2}$，计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ （$\alpha>0$）。

解 首先有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\cos\beta x dx\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}\cos\beta x dx。$$

利用例 15.2.8 的结果

$$I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2},$$

可得

$$\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos\beta xdx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\cos\left(2\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\sqrt{t}x\right)d(\sqrt{t}x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

于是

$$J=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\left(t\alpha^2+\frac{\beta^2}{4t}\right)}d\sqrt{t}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|\beta|},$$

其中最后一个等式利用了上题的结论。