# 习　题　11.3　连续函数的性质

1．　　设$\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m$为连续映射。如果$\mathbf{D}$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a}\in\mathbf{D}$，证明

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

**证**　由$\mathbf{f}$在$\boldsymbol{a}$连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta)$，成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

又由于$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，对于上述$\delta>0$，存在$K$，当$k>K$时成立

$$|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}|<\delta，$$

于是当$k>K$时成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

2．　　设$f$是$\mathbf{R}^n$上的连续函数，$c$为实数。设

$$\boldsymbol{A}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}，\quad \mathbf{B}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leq c\}。$$

　　证明$\boldsymbol{A}_c$为$\mathbf{R}^n$上的开集，$\boldsymbol{B}_c$为$\mathbf{R}^n$上的闭集。

**证**　对于任意$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{A}_c$，由于$f$在$\boldsymbol{x}_0$连续，取$\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0)>0$，则$\exists\delta>0$，$\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$，成立

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0)，$$

即有$f(\boldsymbol{x})<c$，所以$\boldsymbol{x}\in\mathbf{A}_c$。这说明$\boldsymbol{A}_c$为$\mathbf{R}^n$上的开集。

　　由$f$在$\mathbf{R}^n$上连续可知$-f$也在$\mathbf{R}^n$上连续，于是

$$(\mathbf{B}_c)^c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid -f(\boldsymbol{x})<-c\}$$

为$\mathbf{R}^n$上的开集，所以$\boldsymbol{B}_c$为$\mathbf{R}^n$上的闭集。

3．　　设二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy}，\quad (x,y)\in\mathbf{D}=[0,1)\times[0,1)，$$

　　证明：$f$在$\mathbf{D}$上连续，但不一致连续。

**证**　由于$f$在$\mathbf{D}$上是初等函数，所以连续。但因为当$n\to+\infty$时，

$$\left|(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})-(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})\right|\to 0，$$

而

$$f(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})-f(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$$

$$=\frac{4n^2}{4n-1}-\frac{n^2}{2n-1}=\frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)}\to+\infty\text{，}$$

所以 $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上不一致连续。

4． 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集，定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f$ 为

$$f(\boldsymbol{x})=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,|\,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{A}\}\text{。}$$

它称为 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{A}$ 的距离。证明：

(1) 当且仅当 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$ 时， $f(\boldsymbol{x})=0$ ；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in\mathbf{R}^n$ ，不等式

$$\left|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')\right|\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|$$

成立，从而 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 是紧集，则对于任意 $c>0$，点集 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leq c\}$ 是紧集。

**证** （1）假定 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$，则存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}|=0$，所以 $f(\boldsymbol{x})=0$。反之，由 $f(\boldsymbol{x})=0$ 可知存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}|=0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，所以 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$。

（2）不妨假设 $f(\boldsymbol{x}')\geq f(\boldsymbol{x}'')$。首先对于任意的 $k$，存在 $\mathbf{x}_k\in\mathbf{A}$，满足

$$f(\boldsymbol{x}'')>|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}_k|-\frac{1}{k}\text{，}$$

再利用

$$f(\boldsymbol{x}')\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_k|\text{，}$$

两式相减，得到

$$0<f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')<|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_k|-(|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}_k|-\frac{1}{k})\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|+\frac{1}{k}\text{，}$$

令 $k\to\infty$，即得到

$$\left|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')\right|\leq|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|\text{。}$$

由上式即可知 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续。

（3）由（2）知 $f$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，再由习题 2 知点集 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leq c\}$ 是闭集。由于 $\boldsymbol{A}$ 是紧集，所以 $\boldsymbol{A}$ 有界，即 $\exists M,\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$，成立 $|\boldsymbol{x}|\leq M$。$\forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}$，取 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$，使得

$$f(\boldsymbol{y})>|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|-1\text{。}$$

于是

$$|\boldsymbol{y}|\leq|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{x}|<f(\boldsymbol{y})+1+M\leq c+1+M\text{，}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 也有界。所以 $\boldsymbol{B}$ 为有界闭集，也就是紧集。

5． 设二元函数 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。证明：

（1）若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，则 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值必定存在；

（2）若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，则 $f$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值与最小值至少存在一个。

**证** （1）任取一点 $(x_0,y_0)$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$。$f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最小值，且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值。

（2）如果 $f(x,y)\equiv 0$，则命题显然成立。不然的话，任取 $(x_0,y_0)$，使得函数值在此点非零。

若 $f(x_0,y_0)>0$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最大值，且此最大值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值。

若 $f(x_0,y_0)<0$，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2\}$ 上必定取到最小值，且此最小值就是它在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值。

6．设 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，满足

(1) 当 $\boldsymbol{x}\ne 0$ 时成立 $f(\boldsymbol{x})>0$；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}$ 与 $c>0$，成立 $f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$。

证明：存在 $a>0, b>0$，使得

$$a|\boldsymbol{x}|\le f(\boldsymbol{x})\le b|\boldsymbol{x}|。$$

**证** 单位球面是 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集，设 $f$ 在单位球面上的最小值和最大值分别为 $a$ 和 $b$，则有

$$0<a\le f(\boldsymbol{x})\le b<+\infty，\quad \forall|\boldsymbol{x}|=1。$$

于是 $\forall \boldsymbol{x}\ne\mathbf{0}$，由于 $\left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|=1$，所以

$$f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\,f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\le b|\boldsymbol{x}|,$$

同理 $f(\boldsymbol{x})\ge a|\boldsymbol{x}|$。由于当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时不等式显然成立，所以 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，成立

$$a|\boldsymbol{x}|\le f(\boldsymbol{x})\le b|\boldsymbol{x}|。$$

7．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射。证明对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意子集 $\boldsymbol{A}$，成立

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{A}})\subset\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}。$$

举例说明 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{A}})$ 能够是 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$ 的真子集。

**证** $\forall\boldsymbol{x}\in\bar{\boldsymbol{A}}$，存在 $\boldsymbol{A}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，由于映射 $\boldsymbol{f}$ 在 $x$ 连续，

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})，$$

所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$，即 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{A}})\subset\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$。

取 n=2， $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。令 $\boldsymbol{A}=\mathbf{R}^2$，则 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，但

$$\mathbf{f}(\bar{\boldsymbol{A}})=\{x\mid x>0\}，\ \overline{\mathbf{f}(\boldsymbol{A})}=\{x\mid x\geq 0\}，$$

$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{A}})$ 是 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$ 的真子集。

8．设 $f$ 是有界开区域 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$ 上的一致连续函数。证明：

（1）可以将 $f$ 连续延拓到 $\mathbf{D}$ 的边界上，即存在定义在 $\bar{\mathbf{D}}$ 上的连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}\big|_{\mathbf{D}}=f$；

（2） $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上有界。

**证** （1）由于 $f$ 在 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$ 上的一致连续， $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$， $\forall\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in\mathbf{D}$ $(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon。$$

设 $\varsigma\in\partial D$，任取点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ （$\boldsymbol{x}_n\in\mathbf{D}$， $\boldsymbol{x}_n\to\varsigma$)，由于 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为 Cauchy 点列，对于上述 $\delta>0$，$\exists K$，当 $m,n>K$ 时，成立 $|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|<\delta$，于是

$$|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon，$$

所以 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 是基本数列，故一定收敛。记该极限为 $g(\varsigma)$。

在 $|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon$ 中令 $m\to\infty$，得到

$$|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\varsigma)|\leq\varepsilon。$$

对于 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{D},|\boldsymbol{x}-\zeta|<\delta/2$，存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中某项 $\boldsymbol{x}_k$，满足

$$|\boldsymbol{x}_k-\zeta|<\delta/2,\ |f(\boldsymbol{x}_k)-g(\zeta)|\leq\varepsilon。$$

于是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k|\leq|\boldsymbol{x}-\zeta|+|\boldsymbol{x}_k-\zeta|<\delta，$$

$$|f(\boldsymbol{x})-g(\zeta)|\leq|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_k)|+|f(\boldsymbol{x}_k)-g(\zeta)|<2\varepsilon，$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to\zeta\\ x\in D}}f(\boldsymbol{x})=g(\zeta)，$$

由此可知 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 的极限 $g(\zeta)$ 只与 $\varsigma\in\partial\mathbf{D}$ 有关，而与点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的选取无

关。令

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in \mathbf{D}, \\ g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in \partial\mathbf{D}。\end{cases}$$

显然，$\tilde{f}$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续。现只要证明 $\tilde{f}$ 在 $\partial\mathbf{D}$ 上连续。设 $\varsigma\in\partial\mathbf{D}$，由

$$\lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\varsigma)=\tilde{f}(\varsigma),$$

可知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$， $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{D}\ (|\boldsymbol{x}-\varsigma|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\varsigma)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对于 $\forall\varsigma'\in\partial\mathbf{D}\ (|\varsigma'-\varsigma|<\delta)$，在上式中令 $\boldsymbol{x}\to\varsigma'$，由

$$\lim_{\substack{x\to\zeta' \\ x\in D}} f(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\varsigma'),$$

可知

$$\left|\tilde{f}(\varsigma')-\tilde{f}(\varsigma)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

于是得到

$$\lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in \overline{D}}} \tilde{f}(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\varsigma),$$

这就证明了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上连续。换言之，$\tilde{f}$ 是定义在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上的连续函数，满足 $\tilde{f}\big|_{\mathbf{D}}=f$。

（2）由于 $\overline{D}$ 为有界闭集，即紧集，$\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 连续保证了 $\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 有界，

从而 $f$ 在 $\mathbf{D}$ 上有界。