第八章　反常积分

习　题　8.1 反常积分的概念和计算

1.　物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位。一个带电量 $+q$ 的点电荷产生的电场对距离 r 处的单位正电荷的电场力为 $F=k\dfrac{q}{r^2}$（k 为常数），求距电场中心 x 处的电位。

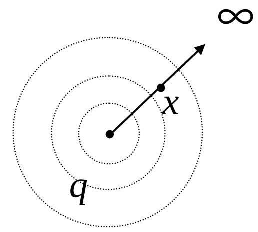

图 8.1.4

解　$U=\int_x^{+\infty}k\dfrac{q}{r^2}dr=\dfrac{kq}{x}$。

2.　证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，k_1 和 k_2 为常数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx。$$

证　设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx$，则

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A[k_1f(x)+k_2g(x)]dx$$

$$=k_1\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx+k_2\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx。$$

3.　计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x dx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos 2x dx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+1}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ $(a>0,b>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{ax^2}dx$　$(a\in\mathbf{R})$；　　(6) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx$　$(p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$； (8) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$；

(9) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ ； (10) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$。

解 (1) $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}d\cos 5x=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 5xdx$

$=\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}d\sin 5x=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx$，

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=\frac{5}{29}。$$

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}d\sin 2x=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\sin 2xdx$

$=-\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}d\cos 2x=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx$，

所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx=\frac{3}{13}。$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

(4) 当 $a\neq b$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{2b}\right)=\frac{\pi}{2ab(a+b)}$$；

当 $a=b$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2a^3}+\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{\pi}{4a^3}=\frac{\pi}{4a^3}$$，

此结果等于在$a\neq b$时的结果中以$b=a$代入后的结果。

（5）当$a\geq 0$时积分发散；当$a<0$时，

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\,dx=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax^2}\,d(ax^2)=-\frac{1}{2a}。$$

（6）当$p\leq 1$时积分发散；当$p>1$时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx=\frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}。$$

（7）令$x=\tan t$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=2。$$

（8）令$e^x=t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{tdt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2(1+t^2)}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{4}。$$

（9）利用第六章第 3 节习题 1(10)的结果

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C，$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

（10）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$，

对等式右端任一积分（例如第二个积分）作变量代换$x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt，$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0。$$

4. 计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ；　　(2) $\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ ；

(3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ ；　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx$ ；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx$ ；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$；

解（1）$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = (-\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = 1$。

（2）$\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx = \int_1^{e} \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} d(\ln x) = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$。

（3）令 $\sqrt{x-1} = t$，则

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = 2\int_0^1 (1+t^2)dt = \frac{8}{3}。$$

（4）令 $\sqrt{1-x} = t$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}。$$

（5）$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx$。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2} d(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})\Big|_{0+}^1，$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})$ 极限不存在，所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx$ 发散；同理积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2} dx$ 也发散。

（6）令 $\sqrt{\tan x} = t$，再利用上面习题 3（9），得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

5．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

解 $$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln xdx=-1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}。$$

6．计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx$； (2) $\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx$。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx$； (4) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx$；

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

解 (1) 令$x=\frac{\pi}{2}-t$，再利用例 8.1.11，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(2) 令$x=\pi-t$，由

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\int_0^{\pi}\pi\ln\sin tdt-\int_0^{\pi}t\ln\sin tdt,$$

得到

$$\int_0^{\pi}x\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2。$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\ln\sin x=(x\ln\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(4) 令$t=\arcsin x$，得到

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cot tdt=\frac{\pi}{2}\ln 2。$$

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \ln x d\arcsin x = (\ln x \arcsin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$。

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

⑴ $(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$； ⑵ $(\mathrm{cpv})\int_1^4\frac{1}{x-2}dx$；

⑶ $(\mathrm{cpv})\int_{1/2}^2\frac{1}{x\ln x}dx$。

解 (1) $(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}[\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_{-A}^{+A} = \pi$。

(2) $(\mathrm{cpv})\int_1^4\frac{1}{x-2}dx = \lim\limits_{\eta\to 0+}[(\ln|x-2|)\Big|_{2+\eta}^4 + (\ln|x-2|)\Big|_1^{2-\eta}] = \ln 2$。

(3) $(\mathrm{cpv})\int_{1/2}^2\frac{1}{x\ln x}dx = \lim\limits_{\eta\to 0+}[(\ln|\ln x|)\Big|_{1+\eta}^2 + (\ln|\ln x|)\Big|_{1/2}^{1-\eta}] = 0$。

8. 说明一个无界函数的反常积分可以化为无穷区间的反常积分。

证 设$\int_a^b f(x)dx$是一个无界函数反常积分，$x=b$是$f(x)$的唯一奇点（即$f(x)$在$x=b$的左领域无界）。令$t=\frac{b-a}{b-x}$，则

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^{+\infty} f\left(b-\frac{b-a}{t}\right)\frac{dt}{t^2},$$

等式右端就是一个无穷区间的反常积分。

9.⑴ 以$\int_a^{+\infty} f(x)dx$为例，叙述并证明反常积分的保序性和区间可加性；

⑵ 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性。

解 （1）保序性：

设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，且在$[a,+\infty)$成立$f(x)\ge g(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ge \int_a^{+\infty} g(x)dx \text{；}$$

证明：由定积分的保序性，可知$\int_a^A f(x)dx \ge \int_a^A g(x)dx$，再令$A\to+\infty$。

区间可加性：

设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则对任意$c\in[a,+\infty)$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx\text{；}$$

证明：由定积分的区间可加性，可知$\int_a^A f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^A f(x)dx$，再令$A\to+\infty$。

(2)设$f(x)=g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,则$\int_1^{+\infty} f(x)dx$与$\int_1^{+\infty} g(x)dx$收敛,但$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$不收敛。

10. 证明当$a>0$时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx\text{。}$$

证 $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx=\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx+\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx\text{，}$$

对上式右端两积分中任意一个（例如第二个）作变量代换$x=\dfrac{a^2}{t}$，则当$x:a\to+\infty$时，$t:a\to 0$；且$\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{t}{a}+\dfrac{a}{t}$，$\dfrac{\ln x-\ln a}{x}dx=\dfrac{\ln t-\ln a}{t}dt$，于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx=-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt\text{，}$$

得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt=0\text{。}$$

11．设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。证明$A=0$。

证 用反证法。不妨设$A>0$，则对$\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$，$\exists X>a$，$\forall x>X$：$|f(x)-A|<\frac{1}{2}A$，从而$f(x)>\frac{1}{2}A$。由

$$\int_a^B f(x)dx=\int_a^X f(x)dx+\int_X^B f(x)dx>\int_a^X f(x)dx+\frac{1}{2}A(B-X),$$

可知$\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx=+\infty$，与$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛发生矛盾。

同理也可证明不可能有$A<0$，所以$A=0$。

12．设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx=\int_a^{+\infty} df(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-f(a)$，

由$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$的收敛性，可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限，再利用第11题的结论，得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0。$$