第四章　微分

习　题　4.1　微分和导数

1. 半径为 1cm 的铁球表面要镀一层厚度为 0.01cm 的铜，试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克？（铜的密度为 $8.9\text{g}/\text{cm}^3$。）

解 球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，每只球镀铜所需要铜的质量为

$$m=\rho\Delta V\approx 4\rho\pi r^2\Delta r\approx 1.12\text{ g}。$$

2. 用定义证明，函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中，除了 $x=0$ 这一点之外都是可微的。

证 当 $x=0$ 时，$\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x^2}$ 是 Δx 的低阶无穷小，所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可微。当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta y&=\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})\\&=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x^2}}\Delta x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Delta x+o(\Delta x),\end{aligned}$$

所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x\neq 0$ 是可微的。

习　题　4.2　导数的意义和性质

1．　设 $f'(x_0)$ 存在，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$。

解 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{(-\Delta x)}=-f'(x_0)$。

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x-x_0\to 0}\dfrac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$。

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$。

2．　(1) 用定义求抛物线 $y=2x^2+3x-1$ 的导函数；

(2) 求该抛物线上过点 $(-1,-2)$ 处的切线方程；

(3) 求该抛物线上过点 $(-2,1)$ 处的法线方程；

(4) 问该抛物线上是否有 (a,b)，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行？

解 (1)因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-1-(2x^2+3x-1)}{\Delta x}=4x+3+2\Delta x$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+3。$$

(2)由于 $f'(-1)=-1$，切线方程为 $y=-1\cdot[x-(-1)]+(-2)=-x-3$。

(3)由于 $f'(-2)=-5$，法线方程为 $y=-\dfrac{1}{-5}[x-(-2)]+1=\dfrac{x+7}{5}$。

(4) 抛物线顶点与焦点的连线平行于 y 轴，即斜率为无穷大，由(1)可

知不存在x，使得$f'(x)=\infty$，所以这样的点(a,b)不存在。

3．设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，且在$x=0$的某个邻域上成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)，$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小。求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程。

解 记$F(x)=f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)$，可得$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=-2f(1)=0$，即$f(1)=0$。

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}=8$与

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]-3\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=4f'(1)，$$

得到$f'(1)=2$。于是曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=2(x-1)$。

4． 证明：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必定经过它的另一个焦点。 （见图 4.2.5）

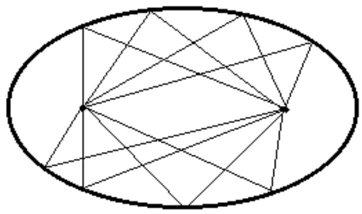

图4.2.5

证 设椭圆方程为

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$，焦点坐标为

$(\pm c,0),\ c=\sqrt{a^2-b^2}$。假设$(x_0,y_0)$为椭圆上任意一点，当$y_0=0$时结论显然成立。现设$y_0\neq 0$，则过此点的切线斜率为$\tan\theta=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$，$(x_0,y_0)$与焦点$(-c,0)$连线的斜率为$\tan\theta_1=\dfrac{y_0}{x_0+c}$，此连线与切线夹角的正切为$k=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta}{1+\tan\theta_1\tan\theta}$。利用$c^2=a^2-b^2$和

$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$代入计算，得到

$$k=\frac{\frac{y_0}{x_0+c}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+cx_0b^2}{(a^2-b^2)x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{a^2b^2+cx_0b^2}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}。$$

(x_0, y_0)与另一焦点$(c,0)$连线的斜率为$\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-c}$，此连线与切线夹角的正切为

$$\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}=\frac{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1-\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{cx_0b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2}{(a^2-b^2)x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{cx_0b^2-a^2b^2}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}=k。$$

由于两个夹角的正切相等，所以两个夹角相等，命题得证。

5．证明：双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为$2a^2$。

证 假设(x_0,y_0)为双曲线上任意一点，则$x_0y_0=a^2$，过这一点的切线斜率为$y'|_{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}=-\frac{y_0}{x_0}$，切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)，$$

易得切线与两坐标轴的交点为$(0,2y_0)$和$(2x_0,0)$。切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(2y_0)(2x_0)=2x_0y_0=2a^2。$$

6． 求函数在不可导点处的左导数和右导数。

(1) $y=|\sin x|$； (2) $y=\sqrt{1-\cos x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-|x|}$； (4) $y=|\ln(x+1)|$.

解 （1）对$y=f(x)=|\sin x|$，当$x=0$时，

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1，$$
$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1，$$

所以$x=0$是不可导点。又由于函数y是周期为π的函数，所有不可导点为$x=k\pi\ (k\in Z)$，且$f_-'(k\pi)=-1$， $f_+'(k\pi)=1$。

（2） $y=f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$，由（1）可知不可导点为$x=2k\pi\ (k\in Z)$，且经计算得到 $f_-'(2k\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f_+'(2k\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（3） $y=f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$不可导点只有$x=0$，且

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1，\quad f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1。$$

（4） $y=f(x)=|\ln(x+1)|$不可导点只有$x=0$，且

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=1，$$
$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=-1。$$

7．讨论下列函数在$x=0$处的可导性：

(1) $y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x},(a>0) & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　(2) $y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\le 0;\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^x, & x>0,\\ ax^2, & x\le 0;\end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 （1） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^{1+a}\sin\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|^a\operatorname{sgn}(\Delta x)\sin\frac{1}{x}\right)=0$，所以函数在$x=0$可导。

(2) 如果函数在$x=0$可导，则必须在$x=0$连续，由$f(0+)=f(0)=b$可得$b=0$。当$b=0$时， $f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$， $f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x-0}{\Delta x}=a$，

故当 $a=b=0$ 时函数在 $x=0$ 可导，其他情况下函数在 $x=0$ 不可导。

（3）由于 $f_+'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x e^{\Delta x}-0}{\Delta x}=1$，$f_-'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{a\Delta x^2-0}{\Delta x}=0\neq f_+'(0)$，

故函数在 $x=0$ 不可导。

（4）当 $a\geq 0$ 时函数在 $x=0$ 不连续，所以不可导；当 $a<0$ 时，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=0$，所以当 $a<0$ 时函数在 $x=0$ 可导。

8． 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在什么情况下，$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导？

解 当 $f(0)\neq 0$ 时，不妨设 $f(0)>0$，则在 $x=0$ 的小邻域中有 $f(x)>0$，故 $|f(x)|=f(x)$，所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导。

当 $f(0)=0$ 时，由于

$$\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\operatorname{sgn}x,$$

分别在 $x=0$ 处计算左、右极限，得到 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处的左导数为 $-|f'(0)|$，右导数为 $|f'(0)|$，所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导的充分必要条件是 $f'(0)=0$。

9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $f_+'(a)\cdot f_-'(b)>0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 至少存在一个零点。

证 由题设知 $f_+'(a)$ 和 $f_-'(b)$ 同号，不妨设两者都为正数。由于

$f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，可知存在 $x_1\ (a<x_1<b)$，$f(x_1)>0$。

同理由于 $f_-'(b)=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$，可知存在 $x_2\ (x_1<x_2<b)$，$f(x_2)<0$。由连续函数的零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 x_1,x_2 之间有零点。

10．设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$？

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$？

解（1）不一定。反例：$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$，$a=0$，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$，

$f'(x)=\frac{1}{x^2}(-1+\sin\frac{1}{x})$，$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\infty$不成立。

（2）不一定。反例：$f(x)=\sqrt{x}$，$a=0$，$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$，而

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0\neq\infty$。

11．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$。证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时成立 $f'(0)=g(0)$。

证　充分性。由 $f(x)=xg(x)$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且成立 $f'(0)=g(0)$。

必要性。令 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，则 $f(x)=xg(x)$，且

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$，即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续。