习　题　7.4

1. 求下列曲线所围的图形面积：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$， $y=x$ ， $x=2$ ；

(2) $y^2=4(x+1)$， $y^2=4(1-x)$ ；

(3) $y=x$ ， $y=x+\sin^2 x$， $x=0$， $x=\pi$ ；

(4) $y=\mathrm{e}^x$， $y=\mathrm{e}^{-x}$， $x=1$ ；

(5) $y=|\ln x|$， $y=0$， $x=0.1$， $x=10$ ；

(6) 叶形线$\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases}$ $0\le t\le 2$ ；

(7) 星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ ；

(8) 阿基米德螺线$r=a\theta,\ \theta=0,\ \theta=2\pi$ ；

(9) 对数螺线$r=a\,\mathrm{e}^{\theta},\ \theta=0,\ \theta=2\pi$ ；

(10) 蚌线$r=a\cos\theta+b$ （$b\ge a>0$）；

(11) $r=3\cos\theta$， $r=1+\cos\theta$ $(-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3})$；

(12) 双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ ；

(13) 四叶玫瑰线$r=a\cos 2\theta$。

(14) Descartes 叶形线$x^3+y^3=3axy$ ；

(15) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 （1） 面积$A=\int_1^2(x-\dfrac{1}{x})dx=(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$。

（2） 面积$A=2\int_0^2\left((1-\dfrac{y^2}{4})-(\dfrac{y^2}{4}-1)\right)dy=2\int_0^2(2-\dfrac{y^2}{2})dy=\dfrac{16}{3}$。

（3） 面积$A=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\dfrac{\pi}{2}$。

（4）面积 $A=\int_0^1 (e^x-e^{-x})dx = e+\frac{1}{e}-2$。

（5）面积 $A=\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx=\int_1^{10}\ln xdx-\int_{0.1}^{1}\ln xdx = x(\ln x-1)\Big|_1^{10}-x(\ln x-1)\Big|_{0.1}^{1}$

$$=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}。$$

（6）面积 $A=\left|\int_0^2 (2t^2-t^3)(2-2t)dt\right| = 2\left|\int_0^2 (2t^2-3t^3+t^4)dt\right| = \frac{8}{15}$。

（7）面积 $A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos tdt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t-\cos^6 t)dt$

$$=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{15}{96}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi a^2。$$

（8）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$。

（9）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 e^{2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\left(e^{4\pi}-1\right)a^2$。

（10）面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+b)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2)d\theta$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta+b^2\pi=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2。$$

（11）面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(3+4\cos 2\theta-2\cos\theta)d\theta=\pi。$$

（12）面积 $A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$。

（13）面积 $A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\theta d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{2}\pi a^2$。

（14）解一：令 $y=tx$，则 $x=\frac{3at}{1+t^3}$， $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$， $t:0\to+\infty$。

于是面积

$$A=\left|\int_0^{+\infty}\frac{3at^2}{1+t^3}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)' dt\right|=9a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt\right|，$$

令 $u=t^3$，则

$$A=3a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2u)}{(1+u)^3}du\right|=3a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{(1+u)^2}-\frac{3}{(1+u)^3}\right)du=\frac{3}{2}a^2。$$

解二： 将 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 $x^3+y^3=3axy$ 中，得到

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}，\quad \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]，$$

于是面积

$$A=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}d\tan\theta$$

$$=-\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{\tan^3\theta+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2。$$

（15）将 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ 中，得到

$$r^2=\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}，$$

于是面积

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta，$$

令 $t=\tan\theta$，则

$$A=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2}=\sqrt{2}a^2\arctan\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi a^2。$$

2. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值。

解 选取焦点 $(a,0)$ 为极点，x 轴为极轴，建立极坐标。 则由 $x=r\cos\theta+a, y=r\sin\theta$ 代入抛物线的方程 $y^2=4ax$ 中，可得抛物线的极坐标方程为

$$r=\frac{2a}{1-\cos\theta}。$$

设过焦点的弦的极角为 α，则它与抛物线所围的面积为

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}d\theta。$$

由

$$A'(\alpha)=2a^2\left(\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right)=-\frac{8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha},$$

令$A'(\alpha)=0$，得到$\alpha=\frac{\pi}{2}$。由于当$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)<0$；当$\alpha>\frac{\pi}{2}$时，$A'(\alpha)>0$，所以$A(\alpha)$在$\alpha=\frac{\pi}{2}$取到极小值，也就是最小值$A(\frac{\pi}{2})$：

$$A(\frac{\pi}{2})=2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}d\theta=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cot^2\frac{\theta}{2})d\cot\frac{\theta}{2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}a^2。$$

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2}$， $0\le x\le 4$；

(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$， $1\le y\le \mathrm{e}$；

(3) $y=\ln\cos x$， $0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$；

(4) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(5) 圆的渐开线$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$；

(6) 心脏线$r=a(1-\cos\theta)$， $0\le\theta\le 2\pi$；

(7) 阿基米德螺线$r=a\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$；

(8) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$， $0\le\theta\le 3\pi$。

解 (1) $L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$。

(2) $L=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}(y-y^{-1})^2}dy=\int_1^e\frac{1}{2}(y+y^{-1})dy=\frac{e^2+1}{4}$。

(3) $L=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^a\sec xdx=\ln(\tan a+\sec a)$。

(4) $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos tdx=6a$。

(5) 由 $x'(t)=at\cos t, y'(t)=at\sin t$，可得

$$L=\int_0^{2\pi} at dt = 2\pi^2 a。$$

（6） $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8a$。

（7） $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$。

（8） $L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3}{2}\pi a$。

4. 在旋轮线的第一拱上，求分该拱的长度为 1:3 的点的坐标。

解 设所求点所对应的参数为α，则

$$L_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1-\cos\frac{\alpha}{2}),$$

$$L_2=\int_{\alpha}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=4a(1+\cos\frac{\alpha}{2}),$$

由$L_2=3L_1$，得$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，即$\alpha=\frac{2}{3}\pi$，所以该点的坐标为$((\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})a,\frac{3a}{2})$。

5. 求下列几何体的体积：

⑴ 正椭圆台：上底是长半轴为a、短半轴为b的椭圆，下底是长半轴为A、短半轴为B的椭圆（$A>a,B>b$），高为h；

⑵ 椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

⑶ 直圆柱面$x^2+y^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$所围的几何体；

⑷ 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和直圆柱面$x^2+y^2=ax$所围的几何体。

解（1） $V=\int_0^h\pi(a+\frac{A-a}{h}x)(b+\frac{B-b}{h}x)dx=\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$。

（2） $V=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$。

（3）用平行于$0yz$平面的平面去截这立体的第一卦限的部分，截面为正方形，于是

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3。$$

（4）用平行于$0yz$平面的平面去截这立体，则截面积为

$$A(x)=2\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dy=2\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}+2(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}。$$

由

$$\int_0^a(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx=\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}d(a^2x-\frac{1}{3}x^3)$$

$$=(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\Big|_0^a-\int_0^a(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(a+x)}dx=(\frac{\pi}{3}-\frac{32}{45})a^3，$$

及

$$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}dx=\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)dx=\frac{4}{15}a^3，$$

得到

$$V=(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9})a^3。$$

6. 证明以下旋转体的体积公式：

(1) 设 $f(x)\ge 0$ 是连续函数，由 $0\le a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)$ 所表示的区域绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx；$$

(2) 在极坐标下，由 $0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi,\ 0\le r\le r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta。$$

证（1）作区间 $[a,b]$ 的划分 $P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则关于小区域 $\{(x,y)|x_{i-1}\le x\le x_i,0\le y\le f(x)\}$ 绕 y 轴旋转所得的体积有

$$\Delta V_i\approx\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)f(x_i)\approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i。$$

设 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)$，令 $\lambda\to 0$，就有

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx。$$

(2) 解一： 设 $x=r(\theta)\cos\theta$， $y=r(\theta)\sin\theta$， $a=r(\alpha)\cos\alpha$， $b=r(\beta)\cos\beta$，则

$$\begin{aligned}V&=\int_b^a \pi y^2dx-\frac{1}{3}\pi ar^2(\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\pi br^2(\beta)\sin^2\beta\\&=\int_b^a \pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi\int_a^b d(y^2x)=\int_\beta^\alpha \pi r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta\\&+\frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta\left(3r^2r'\sin^2\theta\cos\theta+2r^3\sin\theta\cos^2\theta-r^3\sin^3\theta\right)d\theta\\&=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}\end{aligned}$$

解二： 首先，由 $0\le\theta\le\beta\le\pi, 0\le r\le a$ 所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{\pi}{3}a^2\sin^2\beta a\cos\beta+\pi\int_{a\cos\beta}^a(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi}{3}(1-\cos\beta)a^3\text{。}$$

然后作 $[\alpha,\beta]$ 的划分：$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta$，考察由 $\theta_{i-1}\le\theta\le\theta_i, 0\le r\le r(\theta)$ 所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积，这小区域可近似看作扇形，于是这小块的体积应近似等于

$$\Delta V_i\approx\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_i)-\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_{i-1})\approx\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\cdot\sin\theta_i\Delta\theta_i\text{，}$$

从而

$$V\approx\sum_{i=1}^n\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\sin\theta_i\Delta\theta_i\text{。}$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta\theta_i)\to 0$，就有

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积：

（1） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴；

（2） $y=\sin x$， $y=0$， $0\le x\le\pi$，

① 绕 x 轴， ② 绕 y 轴；

（3） 星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$，绕x轴；

（4） 旋轮线$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$， $y = 0$，

① 绕y轴， ② 绕直线$y = 2a$；

（5） $x^2 + (y-b)^2 = a^2$，（$0 < a \le b$），绕x轴；

（6） 心脏线$r = a(1 - \cos\theta)$，绕极轴；

（7） 对数螺线$r = a\,\mathrm{e}^{\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$，绕极轴；

（8） $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$，绕$x$轴。

解（1） $V = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$。

（2） ①$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi^2$；

②$V = 2\pi\int_0^{\pi}x\sin x dx = 2\pi^2$。

（3） $V = \pi\int_{-a}^{a}y^2 dx = 3\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^7 t\cos^2 t dt$

$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t - \sin^9 t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3$。

（4） ①$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 6\pi^2 a^3$；

②$V = \pi(2a)^3 - \pi\int_0^{2\pi}[2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t)dt = 7\pi^2 a^3$。

（5） $V = \pi\int_{-a}^{a}\left((b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2\right)dx = 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi^2 a^2 b$。

（6）由第 6 题（2），得

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1 - \cos\theta)^3\sin\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3。$$

（7） $V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3 e^{3\theta}\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{15}(e^{3\pi} + 1)a^3$。

（8） $V = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^3(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta d\theta$，令$t = \cos\theta$，则

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt\text{。}$$

由

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=t(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-6\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=1-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt\text{，}$$

得到

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}t\sqrt{2t^2-1}-\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}\right|\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8}\text{，}$$

所以

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right]a^3\text{。}$$

8. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 在 $x\in[0,a]$ 和 $x\in[a,c]$ 的弧段分别绕 x 轴旋转一周后，所得到旋转体的体积相等，求 c 与 a 的关系。

解 $$\pi\int_0^a x^2(x-a)^2dx=\pi\int_a^c x^2(x-a)^2dx\text{，}$$

积分后化简，得到

$$2a^5-10a^2c^3+15ac^4-6c^5=0\text{。}$$

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 在 $x\in[0,\xi]$ 的弧段绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积，求常数 a 使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)\text{。}$$

解 由

$$V(a)=\pi\int_0^a \frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi a^2}{2(1+a^2)},$$

可知 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{2}$，于是得到 $\frac{a^2}{1+a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a=1$。

10．将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周围成一个旋转椭球体，再沿 x 轴方向用半径为 r（$r<b$）的钻头打一个穿心的圆孔，剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半，求 r 的值。

解　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转椭球体的体积为

$$V_1=2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{4}{3}\pi ab^2。$$

割下部分的体积为

$$V_2=2\pi r^2\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}+2\pi\int_{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}}^a b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\frac{4\pi}{3}\left(ab^2-\frac{a}{b}(b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)。$$

由 $V_1=2V_2$，解得 $r=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$。

11．设直线 $y=ax$（$0<a<1$）与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1，且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2。

（1）确定 a 的值，使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

（2）该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解（1）$S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$。

记 $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$，则 $f'(a)=a^2-\frac{1}{2}, f''(a)=2a$。令 $f'(a)=0$，得到 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $f''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0$。所以 S_1+S_2 在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取到最小值：

$$\min\{S_1+S_2\}=f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})。$$

（2）旋转体体积

$$V=\pi\int_0^a[(ax)^2-x^4]dx+\pi\int_a^1[x^4-(ax)^2]dx=(\frac{4}{15}a^5-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5})\pi。$$

将 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入，就得到

$$V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi。$$

12．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2 \quad（a\text{为常数}）。$$

进一步，假设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2。

（1） 求函数 $f(x)$ ；

（2）当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小？

解（1）由 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ ，可得 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$ ，所以 $\frac{f(x)}{x}=\frac{3a}{2}x+c$ ，即

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+cx。$$

对 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 两边关于 x 积分，有 $\int_0^1 xdf(x)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{a}{2}$ ，由此可得 $f(1)=4+\frac{a}{2}$，从而 $c=4-a$ ，于是

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x。$$

（2） $$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160)。$$

令 $V'=0$ ，得 $a=-5$ ，且这时 $V''=\frac{\pi}{15}>0$ ，所以在 $a=-5$ 时旋转体的体积取到最小值。

13．求下列旋转曲面的面积：

⑴ $y^2=2px$ ， $0\le x\le a$ ，绕 x 轴；

⑵ $y=\sin x$ ， $0\le x\le \pi$，绕 x 轴；

⑶ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴；

⑷ 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi$ ，绕 x 轴；

⑸ 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ ，绕极轴；

⑹ 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ ，

(i)绕极轴，(ii) 绕射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

解（1）面积 $A=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx$

$$=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]。$$

（2）面积 $A=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$$=-\pi\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}+\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(\sqrt{2}+1)。$$

（3）面积

$$A=2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+(\frac{b}{a}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}dx=\frac{4b}{a^2}\pi\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx$$

$$=\begin{cases}2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a} & a<b\\ 4\pi ab & a=b\\ 2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} & a>b\end{cases}。$$

（4）面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t dt=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d\sin t=\frac{12}{5}\pi a^2$。

（5）面积 $A=2\pi\int_0^{\pi}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4a^2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta$

$$=16a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

（6）(i) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=(4-2\sqrt{2})\pi a^2$；

(ii) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\pi a^2$。

14．设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由该曲线、所作切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

解　由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$，可设曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过点 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-x_0)，$$

而此切线过原点，由此可得 $x_0=2,y_0=1$，于是切线方程为

$$y=\frac{1}{2}x。$$

旋转体的表面积

$$A=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}dx+2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 xdx+\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)。$$

15．证明由空间曲线

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[T_1,T_2] \\ z=z(t), \end{cases}$$

垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\ ，$$

这里假设 $x'(t)$， $y'(t)$， $z'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上连续，且 $z(t)\ge 0$。

证　作 $[T_1,T_2]$ 的划分：$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，设空间曲线对应于小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 的小弧段在 Oxy 平面的投影的长度为 Δs_i，则

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\ ，$$

其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$。于是这段小弧段垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积为

$$\Delta S_i\approx z(\xi_i)\Delta s_i=z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i。$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}(\Delta t_i)$，就得到

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt\ 。$$

16．求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径。

（1） $xy=4$，在点 $(2,2)$ ；

（2） $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ （$a>0$），在 $t=\pi/2$ 对应的点。

解（1） $y'=-\dfrac{4}{x^2},y''=\dfrac{8}{x^3}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\ R=2\sqrt{2}\text{。}$$

（2） $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a},\ R=2\sqrt{2}a\text{。}$$

17．求下列曲线的曲率和曲率半径。

（1） 抛物线 $y^2=2px$ （$p>0$）；

（2） 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ；

（3） 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ （$a>0$）；

（4） 圆的渐开线 $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ （$a>0$）。

解（1） $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{p},\ \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{p}$，于是

$$K=\frac{\frac{1}{p}}{[1+(\frac{y}{p})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}，\quad R=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}\text{。}$$

（2） 令 $x=a\sec t,y=b\tan t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}=\frac{b}{a}\csc t,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\cot t\csc t}{\tan t\sec t}=-\frac{b}{a^2}\cot^3 t，$$

于是

$$K=\frac{\frac{b}{a^2}|\cot t|^3}{[1+(\frac{b}{a}\csc t)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab|\cot t|^3}{(a^2+b^2\csc^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^4b}{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}，$$

$$R=\frac{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4b}\text{。}$$

（3） 令 $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\sin t\cos^4 t},$$

于是

$$K=\frac{\frac{1}{3a}\left|\frac{1}{\sin t\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a}\frac{1}{|\sin t\cos t|}=\frac{1}{3\sqrt[3]{|axy|}},\quad R=3\sqrt[3]{|axy|}。$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$，

于是

$$K=\frac{\left|\frac{1}{at\cos^3 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{at},\quad R=at。$$

18．求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率圆方程。

解 $y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的曲率为

$K=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 曲率半径为 $R=2\sqrt{2}$。

由于曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'=1$，所以法线方程为 $y=-x+1$，设 (a,b) 为曲率圆的圆心，则 $b=-a+1$。

再由 $(a-1)^2+(b-0)^2=8$，解得 $a=3,b=-2$，所以曲率圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+2)^2=8。$$

19．设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]\,(\subset[0,2\pi])$，且 $r(\theta)$ 二阶可导。证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

证 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则其曲率为

$$K=\frac{|y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}。$$

由 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$，可得

$$x'=r'\cos\theta-r\sin\theta,\ y'=r'\sin\theta+r\cos\theta，$$

$$x''=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta,\ y''=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta，$$

于是

$$(x')^2+(y')^2=r^2+r'^2，\quad y''x'-y'x''=r^2+2r'^2-rr''，$$

所以

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}。$$