习 题 14.5 场论初步

1．设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$，对下列数量场 $f(x,y,z)$，分别计算 $\operatorname{grad} f$ 和 $\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})$：

（1） $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$；

（2） $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$；

（3） $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解（1） $\operatorname{grad} f=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x+20y-15z)$。

（2） $\operatorname{grad} f=2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(3x+20y-15z)$。

（3） $\operatorname{grad} f=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(3x+20y-15z)$。

2．求向量场 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的通量，其中球面在这一部分的定向为上侧。

解 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$，方向取上侧，则所求通量为

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,$$

由于 $\iint_{\Sigma} z^2dxdy=\iint_{\Sigma_{xy}}(1-x^2-y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{8}$，

同理可得 $\iint_{\Sigma} x^2dydz=\iint_{\Sigma} y^2dzdx=\frac{\pi}{8}$，

所以 $\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\frac{3}{8}\pi$。

3．设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

（1）满足 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的函数 $f(r)$；

（2）满足 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$ 的函数 $f(r)$。

解（1）经计算得到

$$\frac{\partial(f(r)x)}{\partial x}=f(r)+f'(r)\frac{x^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)y)}{\partial y}=f(r)+f'(r)\frac{y^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)z)}{\partial z}=f(r)+f'(r)\frac{z^2}{r},$$

所以

$$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=3f(r)+rf'(r)。$$

由 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$，得 $3f(r)+rf'(r)=0$，解此微分方程，得到

$$f(r)=\frac{c}{r^3},$$

其中 c 为任意常数。

（2）由 $\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}f'(r)\right)=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r),$$

所以

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad}\ f(r)]=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)。$$

由 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}\ f(r)]=0$，得 $2f'(r)+rf''(r)=0$，解此微分方程，得到

$$f(r)=\frac{c_1}{r}+c_2,$$

其中 c_1,c_2 为任意常数。

4. 计算

$$\mathrm{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是常矢量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}>0$。

解　设 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，$u=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c_1+\frac{c_1}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\ \frac{\partial u}{\partial y}=c_2+\frac{c_2}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\ \frac{\partial u}{\partial z}=c_3+\frac{c_3}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},$$

所以

$$\mathrm{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}。$$

5.　计算向量场 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ 沿下列定向曲线的环量：

（1）圆周 $(x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0$，从 z 轴正向看去为逆时针方向；

（2）圆周 $x^2+y^2=4, z=1$，从 z 轴正向看去为顺时针方向。

解　经计算，可得

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0),$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}=\mathbf{0}\text{，}$$

它在除去z轴的空间上是无旋场。

（1）设$L=\left\{(x,y,z)\middle|\ (x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0\right\}$，从$z$轴正向看去为逆时针方向；$\Sigma=\left\{(x,y,z)\middle|\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 1, z=0\right\}$，方向取上侧。由于$z$轴不穿过曲面$\Sigma$，根据 Stokes 公式，

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_\Sigma \text{rot}\,\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\text{。}$$

（2）令$x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0$，则

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_0^{2\pi} d\theta=-2\pi\text{。}$$

6. 计算向量场$\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$处的旋度，以及在这点沿方向$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的环量面密度。

解　由

$$\text{rot}\mathbf{r}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix}=x(z-y)\mathbf{i}+y(x-z)\mathbf{j}+z(y-x)\mathbf{k}\text{，}$$

可得

$$\text{rot}\,\boldsymbol{r}(M)=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}\text{。}$$

向量场$\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$沿方向$\boldsymbol{n}$的环量面密度为

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{m(\Sigma)}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\text{rot}\,\boldsymbol{r}(M)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{1}{3}\text{。}$$

7. 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$向量场，$f(x,y,z)$为数量场，证明：（假设函数$a_x,a_y,a_z$和$f$具有必要的连续偏导数）

（1）$\text{div}(\text{rot}\ \boldsymbol{a})=0$；

（2）$\text{rot}\,(\text{grad}\ f)=\mathbf{0}$；

（3）$\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{a})-\text{rot}(\text{rot}\,\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$。

证（1）　$$\text{rot}\mathbf{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\text{。}$$

设a_x,a_y,a_z二阶偏导数连续，则

$$\text{div}(\text{rot}\ \boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0\text{。}$$

（2） $$\text{rot}\,(\text{grad}\ f)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}\text{。}$$

（3）由

$$\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{a})=\frac{\partial \text{div}\boldsymbol{a}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \text{div}\boldsymbol{a}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial \text{div}\boldsymbol{a}}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$

以及

$$\text{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$
$$\text{rot}(\text{rot}\ \boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k}\text{，}$$

得到

$$\text{grad}(\text{div}\boldsymbol{a})-\text{rot}(\text{rot}\ \boldsymbol{a})=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}=\Delta\boldsymbol{a}\text{。}$$

8. 位 于 原 点 的 点 电 荷 q 产 生 的 静 电 场 的 电 场 强 度 为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\varepsilon_0$为真空介电常数。求$\text{rot}\,\boldsymbol{E}$。

解 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^4}+\frac{3yz}{r^4}=0\text{，}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{3zx}{r^4}+\frac{3zx}{r^4}=0\text{，}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{3xy}{r^4}+\frac{3xy}{r^4}=0\text{，}$$

所以

$$\text{rot}\ \mathbf{E}=\mathbf{0},\quad (x,y,z)\neq\mathbf{0}\text{。}$$

9. 设$\boldsymbol{a}$为常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，验证：

（1）$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$；

（2）$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$；

（3）$\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

证（1）$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\frac{\partial(a_yz-a_zy)}{\partial x}+\frac{\partial(a_zx-a_xz)}{\partial y}+\frac{\partial(a_xy-a_yx)}{\partial z}=0\text{。}$$

（2）$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_yz-a_zy & a_zx-a_xz & a_xy-a_yx\end{vmatrix}$

$$=2(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{a}\text{。}$$

（3）$\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=\frac{\partial(a_xx^2)}{\partial x}+\frac{\partial(a_yy^2)}{\partial y}+\frac{\partial(a_zz^2)}{\partial z}=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

10. 求全微分$(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$的原函数。

解　记 $\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$，由于

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=-2x=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=-2y=\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}=-2z=\frac{\partial a_x}{\partial y}\text{，}$$

所以向量场$\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$是一个无旋场，其原函数为

$$U(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz+C$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z(z^2-2xy)dz=\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)-2xyz+C\text{。}$$

11.证明向量场$\boldsymbol{a}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\quad(x>0)$是有势场并求势函数。

证 当$x>0$时，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)\text{，}$$

所以向量场$\boldsymbol{a}$是有势场，其势函数为

$$V(x,y)=-U(x,y)=-\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}+C$$

$$=-\int_1^x\frac{dx}{x}-\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy+C=-\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C\text{。}$$

12.证明向量场$\boldsymbol{a}=(2x+y+z)yz\boldsymbol{i}+(x+2y+z)zx\boldsymbol{j}+(x+y+2z)xy\boldsymbol{k}$是有势场，

并求出它的势函数。

证 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=x^2+2x(y+z)=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=y^2+2y(x+z)=\frac{\partial a_z}{\partial x}，$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=z^2+2z(x+y)=\frac{\partial a_x}{\partial y}，$$

所以向量场$\boldsymbol{a}$是有势场。设原函数为$U=U(x,y,z)$，则

$$\begin{aligned}dU&=(2x+y+z)yzdx+(x+2y+z)zxdy+(x+y+2z)xydz\\&=[yzdx^2+x^2(zdy+ydz)]+[y^2(zdx+xdz)+zxdy^2]\\&+[z^2(ydx+xdy)+xydz^2]\\&=d(x^2yz)+d(xy^2z)+d(xyz^2)=d[xyz(x+y+z)]，\end{aligned}$$

所以势函数为

$$V(x,y,z)=-U(x,y,z)=-xyz(x+y+z)+C。$$

13.验证：

（1）$u=y^3-3x^2y$为平面$\mathbf{R}^2$上的调和函数；

（2）$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$为$\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$上的调和函数；

（3）$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$为$\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上的调和函数。

解（1）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y，$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0，$$

即$u=y^3-3x^2y$为平面$\mathbf{R}^2$上的调和函数。

（2）因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2}，$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0，$$

即$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$为$\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$上的调和函数。

（3）记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}，\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x^2}{r^5}，$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}=-\frac{y}{r^3}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y}{r^4}\frac{y}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y^2}{r^5}，$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}=-\frac{z}{r^3}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z}{r^4}\frac{z}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z^2}{r^5}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}=0，$$

即$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$为$\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上的调和函数。

14.设$u(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上具有二阶连续偏导数，证明u是调和函数的充要条件为：对于$\mathbf{R}^2$中任意光滑封闭曲线C，成立$\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿$C$的外法线方向的方向导数。

证 必要性。设C是$\mathbf{R}^2$中任意光滑封闭曲线，由

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\tau,y)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\tau,x)，$$

其中$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{\tau}$分别是曲线C上点(x,y)处的单位外法向和单位切向，得到

$$\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx。$$

由 green 公式，得到

$$\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=0。$$

充分性。如果存在点$M_0(x_0,y_0)$，使得 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}\neq 0$，不妨设其大于零。由于$u(x,y)$具有二阶连续偏导数，所以存在$\delta>0$，使得在$D=O(M_0,\delta)$上，成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0，$$

于是

$$\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy>0，$$

与条件矛盾，所以u是调和函数。

15.设$u=u(x,y)$与$v=v(x,y)$都为平面上的调和函数。令$F=\sqrt{u^2+v^2}$。证明当$p\geq 2$时，在$F\neq 0$的点成立

$$\Delta(F^p)\geq 0。$$

证 由

$$\frac{\partial F^p}{\partial x}=pF^{p-1}\frac{uu_x+vv_x}{F}=pF^{p-2}(uu_x+vv_x)$$

和

$$\frac{\partial F^p}{\partial y}=pF^{p-1}\frac{uu_y+vv_y}{F}=pF^{p-2}(uu_y+vv_y)\text{，}$$

得到

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial x^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_x+vv_x)^2+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx})$$

和

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial y^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_y+vv_y)^2+pF^{p-2}(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy})\text{，}$$

所以

$$\Delta(F^p)=$$

$$p(p-2)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2\ +v_y^2\ )\ge 0\text{。}$$

16.设$\mathbf{B}=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，$\mathbf{F}(x,y,z)$：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$为具有连续导数的向量值函数，且满足

$$\mathbf{F}\big|_{\partial\mathbf{B}}\equiv(0,0,0)\text{，}\quad \nabla\cdot\mathbf{F}\big|_{\mathbf{B}}\equiv 0\text{。}$$

证明：对于任何$\mathbf{R}^3$上具有连续偏导数的函数$g(x,y,z)$成立

$$\iiint_{\mathbf{B}}\nabla g\cdot\mathbf{F}dxdydz=0\text{。}$$

证 由$\nabla\cdot(g\mathbf{F})=\nabla g\cdot\mathbf{F}+g\nabla\cdot\mathbf{F}$及 Gauss 公式，得到

$$\iiint_{\mathbf{B}}\nabla g\cdot\mathsf{F}dxdydz=\iiint_{\mathbf{B}}\nabla\cdot(g\mathsf{F})dxdydz-\iiint_{\mathbf{B}}g\nabla\cdot\mathsf{F}dxdydz$$

$$=\iint_{\partial\mathbf{B}}g\mathsf{F}\cdot d\mathcal{S}\ -\iiint_{\mathbf{B}}g\nabla\cdot\mathsf{F}dxdydz\ =0\text{，}$$

最后一个等式利用了条件 $\mathbf{F}\big|_{\partial\mathbf{B}}\equiv(0,0,0)$，$\nabla\cdot\mathbf{F}\big|_{\mathbf{B}}\equiv 0$。

17.设$\mathbf{D}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\}$，$u(x,y)$在$\overline{\mathbf{D}}$上具有连续二阶偏导数。进一步，设$u$在$\overline{\mathbf{D}}$上不恒等于零，但在$\mathbf{D}$的边界$\partial\mathbf{D}$上恒为零，且在$\mathbf{D}$上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u\quad（\lambda\text{为常数）。}$$

证明

$$\iint_{\mathbf{D}}\|\mathrm{grad}\,u\|^2dxdy+\lambda\iint_{\mathbf{D}}u^2dxdy=0\text{。}$$

证 由 green 公式，

$$\int_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy=\iint_D\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\right]dxdy\text{。}$$

由于在$\partial\mathbf{D}$上$u(x,y)$恒为零，所以$\int_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy=0$，另一方面，在$\mathbf{D}$

上成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$，所以

$$\iint_D\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\lambda u^2\right]dxdy=0，$$

即

$$\iint_{\mathbf{D}}\|\mathrm{grad}\,u\|^2dxdy+\lambda\iint_{\mathbf{D}}u^2dxdy=0。$$

18.设区域Ω由分片光滑封闭曲面Σ所围成，$u(x,y,z)$在$\overline{\Omega}$上具有二阶连续偏导数，且在$\overline{\Omega}$上调和，即满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

（1）证明

$$\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}dS=0，$$

其中$\boldsymbol{n}$为Σ的单位外法向量；

（2）设$(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$为一定点，证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS，$$

其中$\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$r=|\boldsymbol{r}|$。

证（1）设$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由方向导数的计算公式及 Gauss 公式，得到

$$\iint_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint_\Sigma(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$$

$$=\iiint_\Omega(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz=0。$$

（2）由于$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial n}=(\mathrm{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}$，于是

$$\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy，$$

其中$P=\frac{(x-x_0)u+r^2u_x}{r^3}$，$Q=\frac{(y-y_0)u+r^2u_y}{r^3}$，$R=\frac{(z-z_0)u+r^2u_z}{r^3}$。

经计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{xx}}{r}，$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(y-y_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{yy}}{r}，$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{zz}}{r}\text{，}$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\text{。}$$

现在取一个以(x_0,y_0,z_0)为中心，$\delta>0$为半径的球面S_0，使得$S_0\subset\Omega$，并设n为S_0的单位外法向量，然后在Σ与S_0所围的区域Ω'上应用 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma+(-S_0)}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega'}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=0\text{，}$$

从而

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\text{。}$$

注意$r=\delta$为常数，$\cos(\boldsymbol{r},n)=1$与$\iint\limits_{S_0}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$，则

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{S_0}u(x,y,z)dS\text{，}$$

利用积分中值定理并令$\delta\to 0$，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\text{。}$$