习　题　4.4　复合函数求导法则及其应用

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$；

(4) $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$；

(5) $y=\sin x^3$；

(6) $y=\cos\sqrt{x}$；

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{x+1})$；

(8) $y=\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})$；

(9) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(10) $y=\dfrac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$；

(11) $y=\dfrac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$；

(13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$；

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}$；

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　(1)　$y'=2(2x^2-x+1)(2x^2-x+1)'=2(2x^2-x+1)(4x-1)$。

(2)　$y'=e^{2x}(\sin 3x)'+(e^{2x})'\sin 3x=e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$。

(3)　$y'=-\dfrac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}(1+x^3)'=-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$。

(4)　$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$。

(5)　$y'=\cos x^3(x^3)'=3x^2\cos x^3$。

(6)　$y'=-\sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$。

(7) $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{\sqrt{x+1}}-\frac{(x+\sqrt{x+1})'}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1+2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$

$=\frac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$。

(8) $y'=\frac{(e^{-x^2})'}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}}=\frac{-2x\,e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}=\frac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$。

(9) $y'=[\ln(x^4-1)-\ln(x^2]'=\frac{(x^4-1)'}{x^4-1}-2\frac{1}{x}=\frac{2x^4+2}{x(x^4-1)}$。

(10) $y'=\frac{-2(2x^2+\sin x)'}{(2x^2+\sin x)^3}=\frac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$。

(11) $y'=\frac{(1+\ln^2 x)'x\sqrt{1-x^2}-(1+\ln^2 x)(x\sqrt{1-x^2})'}{x^2(1-x^2)}$

$=\frac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(12) $y'=\frac{x'\sqrt{1+\csc x^2}-x(\sqrt{1+\csc x^2})'}{1+\csc x^2}$

$=\frac{\sqrt{1+\csc x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-\cot x^2\csc x^2)\cdot(2x)}{\sqrt{1+\csc x^2}}}{1+\csc x^2}$

$=\frac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(13) $y'=(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}})'+(\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}})'$

$=2(-\frac{1}{3})(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(4x)+3(-\frac{1}{4})(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}(9x^2)$

$=-\frac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\frac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}$。

(14) $y'=e^{-\sin^2 x}(-\sin^2 x)'=-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$。

（15） $y'=\left(\frac{x(a^2-x^2)+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'=\frac{a^2-3x^2+1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x(a^2-x^2+1)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$

$$=\frac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$。

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\sin x$；

(2) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

(3) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

(5) $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

解 （1） $y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\cot x$。

（2） $y'=\frac{(\csc x-\cot x)'}{\csc x-\cot x}=\frac{-\cot x\csc x-(-\csc^2 x)}{\csc x-\cot x}=\csc x$。

（3） $y'=\frac{1}{2}\left(x'\sqrt{a^2-x^2}+x(\sqrt{a^2-x^2})'+a^2(\arcsin\frac{x}{a})'\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}+x(\frac{1}{2})\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & a>0,\\ -\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a<0.\end{cases}$$。

（4） $y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$。

（5） $y'=\frac{1}{2}[x'\sqrt{x^2-a^2}+x(\sqrt{x^2-a^2})'-a^2\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-a^2}+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)-a^2\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\sqrt{x^2-a^2}$$。

3. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $f(\sqrt[3]{x^2})$；

(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)$；

(3) $\sqrt{f(x)}$；

(4) $\arctan f(x)$；

(5) $f(f(e^{x^2}))$；

(6) $\sin(f(\sin x))$；

(7) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$；

(8) $\frac{1}{f(f(x))}$.

解 (1) $f(\sqrt[3]{x^2})'=f'(\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$。

(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=f'\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{x\ln^2 x}f'(\frac{1}{\ln x})$。

(3) $[\sqrt{f(x)}]'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}[f(x)]'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$。

(4) $[\arctan f(x)]'=\frac{1}{1+[f(x)]^2}[f(x)]'=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$。

(5) $[f(f(e^{x^2}))]'=f'(f(e^{x^2}))[f(e^{x^2})]'=f'(f(e^{x^2}))f'(e^{x^2})(e^{x^2})'$

$=2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$。

(6) $[\sin(f(\sin x))]'=\cos(f(\sin x))(f(\sin x))'=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)(\sin x)'$

$=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x$。

(7) $\left[f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{f(x)}\right)\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\frac{1}{f(x)}\right)$。

(8) $\left(\frac{1}{f(f(x))}\right)'=-\frac{f'(f(x))}{f^2(f(x))}[f(x)]'=-\frac{f'(f(x))f'(x)}{(f(f(x)))^2}$。

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=x^x$；

(2) $y=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\cos^x x$；

(4) $y=\ln^x(2x+1)$；

(5) $y = x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$；　　　　(6) $y = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$；

(7) $y = \sin x^{\sqrt{x}}$.

解　由于$(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$，所以$y' = y(\ln y)'$。

(1) $\ln y = x\ln x$,

$$y' = y(\ln y)' = y[x'\ln x + x(\ln x)'] = (1+\ln x)x^x$$。

(2) $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^3+\sin x\right)$，

$$y' = y(\ln y)' = y\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\ln\left(x^3+\sin x\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(x^3+\sin x\right)'\right]$$

$$=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)}-\frac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right]$$。

(3) $\ln y = x\ln\cos x$，

$$y' = y(x\ln\cos x)' = y[x'\ln\cos x + x(\ln\cos x)'] = \left(\ln\cos x - x\tan x\right)\cos^x x$$。

(4) $\ln y = x\ln\ln(2x+1)$，

$$y' = y[x'\ln\ln(2x+1) + x(\ln\ln(2x+1))']$$

$$=\left[\ln\ln(2x+1)+\frac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1)$$。

(5) $\ln y = \ln x + \dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^3)$，

$$y' = y[(\ln x)' + \frac{1}{2}(\ln(1-x^2))' - \frac{1}{2}(\ln(1+x^3))']$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}-\frac{3x^2}{2(1+x^3)}\right]$$。

(6) $\ln y = \sum_{i=1}^{n}\ln(x-x_i)$，

$$y'=y[\sum_{i=1}^{n}\ln'(x-x_i)]=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}。$$

（7）令$u=x^{\sqrt{x}},\ln u=\sqrt{x}\ln x$，则

$$u'=u[(\sqrt{x})'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)']=u(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}})=u(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}})$$，于是，

$$y'=(\sin u)'(u)'=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}。$$

5. 对下列隐函数求$\frac{dy}{dx}$：

（1）$y=x+\arctan y$；（2）$y+x\mathrm{e}^{y}=1$；

（3）$\sqrt{x-\cos y}=\sin y-x$；（4）$xy-\ln(y+1)=0$；

（5）$e^{x^2+y}-xy^2=0$；（6）$\tan(x+y)-xy=0$；

（7）$2y\sin x+x\ln y=0$；（8）$x^3+y^3-3axy=0$.

解 （1）在等式两边对x求导，得到

$$y'=x'+(\arctan y)'=1+\frac{y'}{1+y^2}，$$

解得

$$y'=\frac{1+y^2}{y^2}。$$

（2）在等式两边对x求导，得到

$$y'+x'e^y+xe^y y'=y'(1+xe^y)+e^y=0，$$

解得

$$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}。$$

（3）等式两边平方，再对x求导，得到

$$1+\sin y\cdot(y)'=2(\sin y-x)(\cos y\cdot(y)'-1)\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{1+2(\sin y-x)}{2(\sin y-x)\cos y-\sin y}\text{。}$$

（4）在等式两边对 x 求导，得到

$$x'y+xy'-[\ln(y+1)]'=y+xy'-\frac{1}{1+y}y'=0\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{y^2+y}{1-x-xy}\text{。}$$

（5）在等式两边对 x 求导，得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(xy^2)'=e^{x^2+y}(2x+y')-(y^2+2xyy')=0\text{，}$$

解得

$$y'=-\frac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}\text{。}$$

（6）在等式两边对 x 求导，得到

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-(y+xy')=0\text{，}$$

解得

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}\text{。}$$

（7）在等式两边对 x 求导，得到

$$2y'\sin x+2y(\sin x)'+(x\ln y)'=2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}=0\text{，}$$

解得

$$y'=-\frac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}。$$

（8）在等式两边对 x 求导，得到

$$3x^2+3y^2y'-3ax'y-3axy'=3(x^2+y^2y'-ay-axy')=0，$$

解得

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}。$$

6． 设所给的函数可导，证明：

⑴ 奇函数的导函数是偶函数；偶函数的导函数是奇函数；

⑵ 周期函数的导函数仍是周期函数。

证 ⑴设 $f(x)$ 为奇函数，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[-f(x-\Delta x)]-[-f(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=f'(x)；$$

设 $f(x)$ 为偶函数，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)}=-f'(x)。$$

（2）设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f((x+T)+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)。$$

7．求曲线 $xy+\ln y=1$ 在 $M(1,1)$ 点的切线和法线方程。

解 对方程两边求导，得到 $y+xy'+\frac{y'}{y}=0$，解得 $y'=-\frac{y^2}{xy+1}$，将 $(1,1)$ 代入得到 $y'(1)=-\frac{1}{2}$。于是切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即

$$x+2y-3=0,$$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$，即

$$2x-y-1=0。$$

8． 对下列参数形式的函数求 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t^2\sin t, \\ y=t^2\cos t; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=a\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\operatorname{sh} at, \\ y=\operatorname{ch} bt; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\frac{t+1}{t}, \\ y=\frac{t-1}{t}; \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t, \\ y=\mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t; \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

解：(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3bt}{2a}$。

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{1-3t^2}{-2t}=\frac{3t^2-1}{2t}$。

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{2t\cos t-t^2\sin t}{2t\sin t+t^2\cos t}=\frac{2\cos t-t\sin t}{2\sin t+t\cos t}$。

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{be^t}{(-ae^{-t})}=-\frac{b}{a}e^{2t}$。

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$。

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{b\operatorname{sh}bt}{a\operatorname{ch}at}$。

（7） $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{(1+t^{-1})'}{(1-t^{-1})'}=\frac{-t^{-2}}{t^{-2}}=-1$。

（8） $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$。

（9） $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{-2e^{-2t}\sin^2 t+e^{-2t}2\sin t\cos t}{-2e^{-2t}\cos^2 t+e^{-2t}2\cos t(-\sin t)}=\frac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$。

（10） $\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$。

9．求曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$， $y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程。

解　将 $t=1$ 代入参数方程，有 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}$。经计算，

$$x'(t)=\frac{(2t+t^2)'(1+t^3)-(2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},$$

$$y'(t)=\frac{(2t-t^2)'(1+t^3)-(2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}。$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}。$$

当 $t=1$ 时， $\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}}=3$，所以切线方程为

$$y=3(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=3x-4\text{，}$$

法线方程为

$$y=-\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=-\frac{x}{3}+1\text{。}$$

10．设方程 $\begin{cases} e^x=3t^2+2t+1, \\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0. \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，其中 t 为参变量，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

解 将 $t=0$ 代入参数方程，可得 $e^x=1, -y+\dfrac{\pi}{2}=0$，即 $x=0, y=\dfrac{\pi}{2}$。在两个方程的两端对 t 求导，得到

$$\begin{cases} e^x x'=6t+2, \\ \sin y+t\cos y\cdot y'-y'=0, \end{cases}$$

再将 $t=0$ 代入，解得 $x'(0)=2, y'(0)=1$。所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{2}{1}=2\text{。}$$

11. 证明曲线

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于 $|a|$。

证 利用参数形式所表示的函数的求导公式，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t\text{，}$$

曲线在对应于参数 t 的点处的法线方程为

$$y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t(x-a(\cos t+t\sin t))\text{，}$$

简化后为

$$\cos t \cdot x + \sin t \cdot y - a = 0\text{，}$$

法线到原点的距离为

$$d = \left|\frac{a}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right| = |a|\text{。}$$

12．设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，$y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处连续。请举例说明，在以下情况中，复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处并非一定不可导：

⑴ $u = g(x)$ 在 x_0 处可导，而 $y = f(u)$ 在 u_0 处不可导；

⑵ $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导，而 $y = f(u)$ 在 u_0 处可导；

⑶ $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导，$y = f(u)$ 在 u_0 处也不可导。

解 （1） $u = g(x) = x^2, f(u) = |u|, x_0 = 0, u_0 = 0, y = f(g(x)) = |x^2| = x^2$。

（2） $u = g(x) = |x|, f(u) = u^2, x_0 = 0, u_0 = 0, y = f(g(x)) = |x|^2 = x^2$。

（3） $g(x) = \max\{0, x\},\ f(u) = \min\{0, u\}$，则 $u = g(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不可导，$y = f(u)$ 在 $u_0 = g(0) = 0$ 处也不可导，但 $y = f(g(x)) \equiv 0$ 处处可导。

13．设函数 $f(u)$，$g(u)$ 和 $h(u)$ 可微，且 $h(u) > 1$，$u = \varphi(x)$ 也是可微函数，利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分：

⑴ $f(u)g(u)h(u)$；

⑵ $\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$；

⑶ $h(u)^{g(u)}$；

⑷ $\log_{h(u)} g(u)$；

⑸ $\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$；

⑹ $\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u) + h^2(u)}}$.

解 （1） $d[f(u)g(u)h(u)] = [f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u)]du$

$$= [f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx\text{。}$$

(2) $$d\left[\frac{f(u)g(u)}{h(u)}\right]=\frac{[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]h(u)-[f(u)g(u)]h'(u)}{(h(u))^2}du$$

$$=\frac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)dx$$ 。

(3) $$d[h(u)^{g(u)}]=\left[e^{g(u)\ln(h(u))}\right]'du=e^{g(u)\ln(h(u))}\left[g(u)\ln(h(u))\right]'du$$

$$=h(u)^{g(u)}\left[g(u)\frac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)dx$$ 。

(4) $$d\log_{h(u)}g(u)=d\frac{\ln g(u)}{\ln h(u)}=\frac{[\ln g(u)]'\ln h(u)-\ln g(u)[\ln h(u)]'}{\ln^2 h(u)}du$$

$$=\frac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$$ 。

(5) $$d\arctan\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]=\frac{\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]'}{1+\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]^2}du=\frac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)dx$$ 。

(6) $$d\frac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}=-\frac{\left[f^2(u)+h^2(u)\right]'}{2(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}du=-\frac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$$ 。