习　题　13.3　重积分的变量代换

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 是由圆周 $x^2+y^2=R^2\ \ (R>0)$ 所围区域；

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{x}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 是由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围区域；

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 是由圆周 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域；

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限上的区域。

解（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi(1-e^{-R^2})$。

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{x}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r}rdr=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{15}$。

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}} (x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2dr$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^4d\theta=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt=\frac{\pi}{2}。$$

注：本题也可通过作变换

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}+r\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}})$$

来求解。

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}。$$

2. 求下列图形的面积：

（1）$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$　（$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$）所围的区域；

（2）由抛物线 $y^2=mx,\ y^2=nx\ \ (0<m<n)$，直线 $y=\alpha x,\ y=\beta x\ \ (0<\alpha<\beta)$ 所围的区域；

（3）三叶玫瑰线 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ \ (a>0)$ 所围的图形；

（4）曲线 $\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ \ (h,k>0;\ a,b>0)$ 所围图形在 $x>0,\ y>0$ 的部分。

解（1）作变换$u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$，则$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=a_1b_2-a_2b_1$，于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{D'}dudv=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}。$$

（2）作变换$u=\dfrac{y^2}{x}, v=\dfrac{y}{x}$，则$x=\dfrac{u}{v^2}, y=\dfrac{u}{v}$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{u}{v^4}$，于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\int_m^n udu\int_\alpha^\beta\frac{dv}{v^4}=\frac{1}{6}(n^2-m^2)(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3})。$$

（3）令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则曲线方程可化为极坐标形式$r=a\cos3\theta$，于是面积

$$S=3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{a\cos3\theta}rdr=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{\pi}{4}a^2。$$

（4）作变换$\begin{cases}x=hr\cos^2\theta\\ y=kr\sin^2\theta\end{cases}$，则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=hkr\sin2\theta$，而曲线方程化为

$$r^2=\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta，$$

于是面积

$$\begin{aligned}S&=hk\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}\cos^4\theta+\frac{k^2}{b^2}\sin^4\theta}}rdr\\&=hk\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^2}{a^2}\sin\theta\cos^5\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2}{b^2}\sin^5\theta\cos\theta d\theta\right)\\&=\frac{hk(a^2k^2+b^2h^2)}{6a^2b^2}。\end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy，$$

其中$f(x,y)$在原点附近连续。

解 由积分中值定理，

$$\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\pi\rho^2，$$

其中$\xi^2+\eta^2\le\rho^2$。

因为f连续，且当$\rho\to0$时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，所以

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy=f(0,0)。$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分：

（1）$\iint_{\mathbf{D}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy$，其中**D**是由坐标轴及抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$所围

的区域；

（2）$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$，其中D是由 i）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围区域；

ii）圆$x^2+y^2=R^2$所围的区域；

（3）$\iint\limits_{D} ydxdy$，其中D是由直线$x=-2, y=0$，$y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围的区域；

（4）$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中D是由直线$x+y=2, x=0$及$y=0$所围的区域；

（5）$\iint\limits_{D}\frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy$，其中闭区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$；

（6）$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$，其中闭区域D是由曲线$y=\sqrt{a^2-x^2}-a$（$a>0$）和直线$y=-x$所围成。

解（1）作变换$\begin{cases}u=\sqrt{x}\\ v=\sqrt{y}\end{cases}$，则$\begin{cases}x=u^2\\ y=v^2\end{cases}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$，于是

$$\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy=\iint\limits_{D'}(u+v)4uvdudv=8\int_0^1 vdv\int_0^{1-v}u^2du$$

$$=8\int_0^1[(1-v)^3-(1-v)^4]dv=\frac{2}{15}。$$

注：本题也可通过作变换 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$来求解。

（2）i）作广义极坐标变换$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$，则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，于是

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}ab\ ；$$

ii）利用极坐标变换，得到

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi(a^2+b^2)R^4}{4a^2b^2}。$$

（3）$$\iint\limits_{D} ydxdy=\iint\limits_{\substack{-2\le x\le 0\\ 0\le y\le 2}} ydxdy-\iint\limits_{\sqrt{2y-y^2}\ge -x} ydxdy$$

$$=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{\pi}{2}。$$

（4）作变换$u=x+y, v=\frac{x-y}{x+y}$，则$x=\frac{1}{2}u(1+v), y=\frac{1}{2}u(1-v)$，直接计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{u}{2}。$$

由 $x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2$，可得 $0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1$，于是

$$\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 udu \int_{-1}^1 e^v dv = e - \frac{1}{e}。$$

（5）作变换 $u = x+y, v = x-y$，则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\dfrac{1}{2}$，于是

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{6}。$$

（6）利用极坐标，得到

$$\iint\limits_{D} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a\sin\theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr,$$

由

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = -\int rd\sqrt{4a^2-r^2} = -r\sqrt{4a^2-r^2} + \int \sqrt{4a^2-r^2} dr$$

以及

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = \int \frac{4a^2-(4a^2-r^2)}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = 4a^2 \arcsin\frac{r}{2r} - \int \sqrt{4a^2-r^2} dr,$$

可得

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = 2a^2 \arcsin\frac{r}{2a} - \frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2} + C,$$

所以

$$\iint\limits_{D} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dxdy = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin\theta\cos\theta - \theta) d\theta = \frac{\pi^2-8}{16} a^2。$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$，其中 Ω 为球 $\{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1\}$；

（2）$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dxdydz$，其中 Ω 为椭球

$\left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$；

（3）$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz$，其中 Ω 为柱面 $y = \sqrt{2x-x^2}$ 及平面

$z = 0, z = a \ (a > 0)$ 和 $y = 0$ 所围的区域；

（4）$\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right)}{1+x^2+y^2+z^2} dxdydz$，其中 Ω 为半球

$\{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$；

（5）$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2 dxdydz$，其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2 = 2az$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=3a^2 \quad (a>0)$所围的区域。

（6）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 为平面曲线$\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面与平面$z=8$所围的区域；

（7）$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$，其中闭区域

Ω=$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\ ,\ z\ge 0, y\ge 0\}$；

（8）$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$，其中闭区域$\Omega=\{(x,y,z)\mid$

$0\le x+y-z\le 1, 0\le x-y+z\le 1, 0\le y+z-x\le 1\}$。

解（1）应用球坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{4\pi}{5}。$$

（2）应用广义球坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2dr$$

$$=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2dr,$$

令$r=\sin t$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 tdt$$

$$=\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{2}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{4}\pi^2 abc。$$

（3）应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr\int_0^a zdz=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{9}a^2。$$

（4）应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\frac{z\ln(1+r^2+z^2)}{1+r^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r[\ln^2 2-\ln^2(1+r^2)]dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln^2 2-\frac{\pi}{4}\int_1^2\ln^2 tdt=(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2)\pi。$$

（5）由于 Ω 关于yz平面和zx平面都对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega}xydxdydz=\iiint\limits_{\Omega}yzdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zxdxdydz=0,$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

应用柱坐标，就有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}rdr\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left(r^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^4}{2a}+\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^6}{24a^3}\right)rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left(3a^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{2}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{2a}-\frac{r^6}{24a^3}\right)rdr$$

$$=\pi\left(2(3\sqrt{3}-1)a^5-\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-1)a^5-\frac{8a^6}{6a}-\frac{16a^8}{96a^3}\right)$$

$$=\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5。$$

（6）可得 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=8$ 所围，应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{8}dz=2\pi\int_0^4r^3(8-\frac{r^2}{2})dr=\frac{1024}{3}\pi。$$

（7）应用球坐标，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi。$$

（8）作变换 $u=x+y-z,\ v=x-y+z,\ w=y+z-x$，则 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-4$，

于是 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{4}$，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega'}uvw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{4}\int_0^1udu\int_0^1vdv\int_0^1wdw=\frac{1}{32}。$$

6．求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 所围立体的体积。

解 $$V=2\iint\limits_{x^2+y^2\le Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{6\pi-8}{9}R^3。$$

7．求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积。

解 联立两个曲面方程，解得交线所在的平面为 $z=2$，所围空间区域

在 xy 平面的投影区域为

$$D: x^2+y^2 \le 4，$$

于是

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr=\frac{32}{3}\pi。$$

8．求下列曲面所围空间区域的体积：

（1）$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\ (a,b,c>0)$；

（2）$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ (a,b,c>0)$ 与三张平面 $x=0, y=0, z=0$ 所围的在第一卦限的立体。

解（1）作变量代换 $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta \\ y=br\sin\varphi\sin\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases}$，则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi$。

由于 $x\ge 0$，所以 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\pi, 0\le r\le(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$。于是

$$V=abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}}r^2dr$$

$$=\frac{1}{3}a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{3}a^3bc。$$

（2）作变量代换 $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos^2\theta \\ y=br\sin\varphi\sin^2\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases}$，则 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi\sin 2\theta$，于是

$$V=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{abc}{3}。$$

9．设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的一立体。其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，求此物体的质量。

解 设物体的质量为 M，则

$$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_{\frac{5}{2}r}^{5}dz=2\pi\int_0^2 r^3(5-\frac{5}{2}r)dr=8\pi。$$

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 8π 立方厘米的水，现又倒入 120π 立方厘米的水，问水面比原来升高多少厘米。

解 设容器盛有 8π 立方厘米水时水面的高为 h，则

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{h}}r(h-r^2)dr=8\pi，$$

即$\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{4}h^2=4$，从而解得

$$h=4\ \text{（cm）。}$$

又设容器盛有128π立方厘米水时水面的高为H，则

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{H}}r(H-r^2)dr=128\pi，$$

即$\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{4}H^2=64$，从而解得

$$H=16\ \text{（cm），}$$

所以水面比原来升高12（cm）。

11．求质量为M的均匀薄片$\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$对$z$轴上$(0,0,c)$ $(c>0)$点处的单位质量的质点的引力。

解 设薄片对单位质点的引力为$\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，由对称性，$F_x=F_y=0$。

在均匀薄片上点$(x,y,0)$的附近取一小块，其面积设为$d\sigma=dxdy$，根据万有引力定律，这小块微元对质点的引力为

$$d\boldsymbol{F}=\left(\frac{G\rho x}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,\frac{G\rho y}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\right),$$

于是

$$dF_z=-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy，$$

$$F_z=-\iint_D\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=-G\rho c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{rdr}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2\pi G\rho c\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)=-\frac{2MG}{a^2}\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right),$$

其中G是万有引力常数，M是均匀薄片的质量，ρ是均匀薄片的密度。

12．已知球体$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$，在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方，求球体的质量与重心。

解 设球体的质量为M，则

$$M=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4dr=\frac{32}{15}\pi R^5。$$

设重心的坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$。由

$$\iiint_\Omega z(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5dr=\frac{8}{3}\pi R^6，$$

得到

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{M}=\frac{5}{4}R，$$

所以重心坐标为$(0,0,\frac{5}{4}R)$。

13．证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\le\frac{\pi}{4}。$$

证 首先有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{4}dxdy=\frac{\pi}{4}。$$

另一方面，由 $\sin^2 u\le u^2$，得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\ge \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{16+r^2}}=2\pi(\sqrt{17}-4)。$$

所以

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}}\le\frac{\pi}{4}。$$

14．设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du。$$

证 作变换 $u=x+y,v=x-y$，则 $-1\le u\le 1,-1\le v\le 1$，变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}。$$

于是

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)du\int_{-1}^{1}dv=\int_{-1}^{1}f(u)du。$$

15．设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。证明

$$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}f(u)(1-u^2)du，$$

其中 Ω 为单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$。

证 $$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\int_{-1}^{1}f(z)dz\iint\limits_{\Omega_z}dxdy，$$

其中 $\Omega_z=x^2+y^2\le 1-z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)dxdydz = \int_{-1}^{1} f(z)dz \iint\limits_{\Omega_z} dxdy$$
$$= \pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)dz = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du \text{。}$$

16．计算下列n重积分：

（1）$\int\limits_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n$，其中

$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n\le 1,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,n\}$；

（2）$\int\limits_{\Omega}(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2})dx_1dx_2\cdots dx_n$，其中

Ω 为n维球体$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}\le 1\}$。

解（1）作变量代换$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \\ y_2 = \qquad x_2+x_3+\cdots+x_n \\ \quad\cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad x_n \end{cases}$，则$\dfrac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=1$，从而

$\dfrac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=1$，于是

$$\int_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_{\Omega'}\sqrt{y_1}\,dy_1dy_2\cdots dy_n$$
$$= \int_0^1\sqrt{y_1}\,dy_1\int_0^{y_1}dy_2\int_0^{y_2}dy_3\cdots\int_0^{y_{n-1}}dy_n$$
$$= \frac{1}{(n-i)!}\int_0^1\sqrt{y_1}\,dy_1\int_0^{y_1}dy_2\int_0^{y_2}dy_3\cdots\int_0^{y_{i-1}}y_i^{\ n-i}dy_i$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 y_1^{\frac{1}{2}+n-1}dy_1 = \frac{2}{(n-1)!(2n+1)}\text{。}$$

（2）作球面坐标变换$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$，

它把 Ω 变为

$$\Omega'=\left\{(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\varphi_{n-1})\mid 0\le r\le 1, 0\le\varphi_i\le\pi(i=1,2,\cdots,n-2), 0\le\varphi_{n-1}\le 2\pi\right\}\text{。}$$

它的 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,,$$

于是

$$\int_\Omega (x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$$
$$=\int_0^1 r^{n+1}dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1\cdots\int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}d\varphi_{n-3}\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}\text{。}$$

由于当 k 为正整数时，$\int_0^\pi \sin^{k-1}\varphi d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k-1}\varphi d\varphi$，利用 Wallis 公式，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n=2m\\[2ex] \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1\end{cases}\,,$$

于是得到

$$\int_\Omega (x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^m}{(m-1)!(m+1)} & n=2m\\[2ex] \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!(2m+3)} & n=2m+1\end{cases}\text{。}$$