习题　12.7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法

1. 求下列函数的条件极值：

（1） $f(x,y)=xy$，约束条件为 $x+y=1$；

（2） $f(x,y,z)=x-2y+2z$，约束条件为 $x^2+y^2+z^2=1$；

（3） $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$，约束条件为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ Ax+By+Cz=0, \end{cases}$ 其中 $a>b>c>0$，$A^2+B^2+C^2=1$。

解　（1）令

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=y-\lambda=0, \\ L_y=x-\lambda=0, \\ L_\lambda=-(x+y-1)=0, \end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{1}{2}$，即目标函数只有一个驻点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

由 $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，可知 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 是目标函数的条件极大值点，也是条件最大值点，条件最大值为 $f_{\max}=f(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$。

（2）令

$$L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=1-2\lambda x=0, \\ L_y=-2-2\lambda y=0, \\ L_z=2-2\lambda z=0, \\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0, \end{cases}$$

由前三式得到 $y=-z=-2x$，代入约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$，解得

$$(x,y,z)=\pm(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由于目标函数的驻点为 $\pm(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，对应的目标函数值为 ± 3，所以 $f_{\max}=f(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})=3$， $f_{\min}=f(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=-3$。

（3）令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(Ax+By+Cz)，$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{2x}{a^2}-2\lambda x-\mu A=0, \\ L_y=\dfrac{2y}{b^2}-2\lambda y-\mu B=0, \\ L_z=\dfrac{2z}{c^2}-2\lambda z-\mu C=0, \\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0, \\ L_\mu=-(Ax+By+Cz)=0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(xL_x+yL_y+zL_z\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。

由

$$AL_x+BL_y+CL_z=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)-\mu(A^2+B^2+C^2)=0，$$

得到

$$\mu=\frac{2}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right),$$

代入上面的方程组，得到

$$\begin{cases}\frac{L_x}{2}=\left(\frac{1-A^2}{a^2}-\lambda\right)x-\frac{AB}{b^2}y-\frac{AC}{c^2}z=0,\\ \frac{L_y}{2}=-\frac{AB}{a^2}x+\left(\frac{1-B^2}{b^2}-\lambda\right)y-\frac{BC}{c^2}z=0,\\ \frac{L_z}{2}=-\frac{AC}{a^2}x-\frac{BC}{b^2}y+\left(\frac{1-C^2}{c^2}-\lambda\right)z=0。\end{cases}$$

由约束条件可知驻点不在原点，即上面方程组有非零解，所以其系数行列式为零。经计算得到

$$-\lambda\left[\lambda^2+(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2})\lambda+(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2})\right]=0,$$

显然目标函数的最大值与最小值不为零，即$\lambda\neq 0$，所以f的最大值与最小值分别为方程

$$\lambda^2+(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2})\lambda+(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2})=0$$

的两个根。

2. 在周长为$2p$的一切三角形中，找出面积最大的三角形。

解 记三角形的边长为a,b,c，面积为S，则$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$。令

$$L(a,b,c,\lambda)=p(p-a)(p-b)(p-c)-\lambda(a+b+c-2p),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_a=-p(p-b)(p-c)+\lambda=0,\\ L_b=-p(p-a)(p-c)+\lambda=0,\\ L_c=-p(p-a)(p-b)+\lambda=0,\end{cases}$$

于是

$$p-a=p-b=p-c，$$

再根据约束条件得到

$$a=b=c=\frac{2}{3}p，$$

所以面积最大的三角形为正三角形，最大面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$。

3. 要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

解 假设圆桶的底面半径为 r，高为 h，则圆桶的容积为$\pi r^2 h=1$，表面积为$S=2\pi rh+2\pi r^2$。令

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2 h-1)，$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0, \\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0, \end{cases}$$

解得$h=2r$，再代入约束条件$\pi r^2 h=1$，得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}，\quad h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}。$$

根据题意，目标函数必有最小值，所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，高为$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$时用料最省。

4. 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离。

解 设原点到椭圆上一点的距离为$d(x,y,z)$，则$d^2=x^2+y^2+z^2$。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-z)-\mu(x+y+z-1)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x - \mu = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y - \mu = 0, \\ L_z = 2z + \lambda - \mu = 0, \end{cases}$$

将前两式相减，得到$(\lambda - 1)(x - y) = 0$。

若$\lambda = 1$，则有$\mu = 0$，$z = -\dfrac{1}{2}$，显然不满足约束条件。

若$\lambda \neq 1$，则$x = y$，再联立约束条件$z = x^2 + y^2$与$x + y + z = 1$，可解出$x = y = \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$，$z = 2x^2 = 2 \mp \sqrt{3}$，从而有$d^2 = 9 \mp 5\sqrt{3}$。

由于满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。于是得到

$$d_{\max} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}，\quad d_{\min} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}。$$

5. 求椭圆$x^2 + 3y^2 = 12$的内接等腰三角形，其底边平行于椭圆的长轴，而使面积最大。

解 设$(x, y), x \geq 0$为三角形底边上的顶点，则三角形面积为$S = x(2 - y)$，令

$$L(x, y, \lambda) = x(2 - y) - \lambda(x^2 + 3y^2 - 12)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2 - y - 2\lambda x, \\ L_y = -x - 6\lambda y, \end{cases}$$

消去λ，可得$6y - 3y^2 + x^2 = 0$，再联立约束条件$x^2 + 3y^2 = 12$，可得满足$x \geq 0$的驻点只有$(0, 2)$和$(3, -1)$。

当$(x, y) = (0, 2)$时$S = 0$，当$(x, y) = (3, -1)$时$S = 9$。由题意三角形面积一定存在最大值，于是得到

$$S_{\max} = 9。$$

6. 求空间一点(a, b, c)到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离。

解 设(x,y,z)为平面上的一点，它与点(a,b,c)之间的距离为$d(x,y,z)$，则$d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$，令

$$L(x,y,z,\lambda)=d^2(x,y,z)-\lambda(Ax+By+Cz+D)，$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=2(x-a)-A\lambda=0, \\ L_y=2(y-b)-B\lambda=0, \\ L_z=2(z-c)-C\lambda=0, \end{cases}$$

解得

$$x=a+\frac{1}{2}\lambda A，\quad y=b+\frac{1}{2}\lambda B，\quad z=c+\frac{1}{2}\lambda C，$$

代入约束条件$Ax+By+Cz+D=0$，得到

$$\frac{\lambda}{2}=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}。$$

于是

$$d^2=\left(\frac{\lambda A}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda B}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda C}{2}\right)^2==\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2}，$$

所以(a,b,c)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为

$$d=\frac{|aA+bB+cC+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

7. 求平面$Ax+By+Cz=0$与柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$相交所成的椭圆的面积（$A,B,C$都不为零；$a,b$为正数）。

解 椭圆的中心在原点，原点到椭圆周上点(x,y,z)的距离d的最大值和最小值分别为椭圆的长半轴和短半轴。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)-\mu(Ax+By+Cz)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = 2x - \dfrac{2\lambda x}{a^2} - \mu A = 0, \\ L_y = 2y - \dfrac{2\lambda y}{b^2} - \mu B = 0, \\ L_z = 2z - \mu C = 0, \\ L_\lambda = -(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1) = 0, \\ L_\mu = -(Ax + By + Cz) = 0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(xL_x + yL_y + zL_z\right) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda = 0。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于λ的解中。以$\mu = \dfrac{2z}{C} = -2\dfrac{Ax + By}{C^2}$代入前两个方程，可得

$$\begin{cases} \dfrac{L_x}{2} = \left(1 - \dfrac{\lambda}{a^2} + \dfrac{A^2}{C^2}\right)x + \dfrac{AB}{C^2}y = 0, \\ \dfrac{L_y}{2} = \dfrac{AB}{C^2}x + \left(1 - \dfrac{\lambda}{b^2} + \dfrac{B^2}{C^2}\right)y = 0, \end{cases}$$

此方程组有非零解，所以系数行列式为 0。因此

$$\left(1 - \frac{\lambda}{a^2} + \frac{A^2}{C^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{b^2} + \frac{B^2}{C^2}\right) - \frac{A^2B^2}{C^4} = 0，$$

即

$$A^2\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right) + B^2\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) + C^2\left(1 - \frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0。$$

这个二次方程的两个根λ_1与λ_2就是椭圆的长半轴和短半轴的平方，因此椭圆面积为$S = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，利用多项式根与系数的关系可得

$$\lambda_1\lambda_2 = (A^2 + B^2 + C^2)\frac{a^2b^2}{C^2}，$$

所以

$$S=\frac{\pi ab}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\text{。}$$

8. 求 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在条件 $x+y=a$ 下的最小值，其中 $x\ge 0$， $y\ge 0$， a 为常数。并证明不等式

$$\frac{x^4+y^4}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\text{。}$$

解　令

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}\left(x^4+y^4\right)-\lambda(x+y-a)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_x=2x^3-\lambda=0,\\L_y=2y^3-\lambda=0,\\L_\lambda=-(x+y-a)=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=\frac{a}{2}$。

由于连续函数 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在线段 $\{(x,y)\,|\,x+y=a,x\ge 0,y\ge 0\}$ 的两个端点 $(0,a),(a,0)$ 上的函数值有 $f(0,a)=f(a,0)=\frac{1}{2}a^4>f(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=\frac{1}{16}a^4$，所以 $f_{\min}=f(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=\frac{1}{16}a^4$。因此

$$\frac{x^4+y^4}{2}\ge\frac{1}{16}a^4=\left(\frac{a}{2}\right)^4=\left(\frac{x+y}{2}\right)^4\text{。}$$

9. 当 $x>0,\ y>0,\ z>0$ 时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。并由此证明：当 a,b,c 为正实数时，成立不等式

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6\text{。}$$

解　令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{x} - 2x\lambda = 0, \\ L_y = \dfrac{2}{y} - 2y\lambda = 0, \\ L_z = \dfrac{3}{z} - 2z\lambda = 0, \end{cases}$$

解得 $2\lambda = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{3}{z^2}$，代入约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 6R^2$，可得

$$x^2 = R^2，\quad y^2 = 2R^2，\quad z^2 = 3R^2。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是得到

$$\ln x + 2\ln y + 3\ln z \le \ln[\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}] = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)，$$

即

$$xy^2z^3 \le 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}\right)^3。$$

由前一式得到

$$f_{\max} = f(R, \sqrt{2}R, \sqrt{3}R) = \ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)。$$

在后一式中令 $a = x^2$，$b = y^2$ 和 $c = z^2$，得到

$$ab^2c^3 \le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6。$$

10．（1） 求函数 $f(x, y, z) = x^a y^b z^c \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$ 在约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$ 下的极大值，其中 k, a, b, c 均为正常数；

（2）利用（1）的结果证明：对于任何正数 u, v, w，成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

解 （1）令

$$L(x, y, z, \lambda) = a\ln x + b\ln y + c\ln z - \lambda(x^k + y^k + z^k - 1)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{a}{x} - k\lambda x^{k-1} = 0, \\ L_y = \dfrac{b}{y} - k\lambda y^{k-1} = 0, \\ L_z = \dfrac{c}{z} - k\lambda z^{k-1} = 0, \end{cases}$$

解得 $k\lambda = \dfrac{a}{x^k} = \dfrac{b}{y^k} = \dfrac{c}{z^k}$，代入约束条件 $x^k + y^k + z^k = 1$，得到 $\dfrac{a+b+c}{k\lambda} = 1$，所以

$$x^k = \frac{a}{a+b+c}，\quad y^k = \frac{b}{a+b+c}，\quad z^k = \frac{c}{a+b+c}。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是

$$a\ln x + b\ln y + c\ln z = \ln(x^a y^b z^c) \le \ln\left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}},$$

即得到

$$x^a y^b z^c \le \left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}。$$

（2）令 $k=1$，$x = \dfrac{u}{u+v+w}$，$y = \dfrac{v}{u+v+w}$，$z = \dfrac{w}{u+v+w}$，则 $x+y+z=1$，且

$$x^a y^b z^c = \left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a \left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b \left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c = \frac{u^a v^b w^c}{(u+v+w)^{a+b+c}}。$$

利用（1）的结果，有

$$x^a y^b z^c \le \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}。$$

整理后得到

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

11．求a,b之值，使得椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，且面积最小。

解　为了使椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$既包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，又面积最小，可以要求圆心$(1,0)$到椭圆周上的点的最短距离为$1$。为此先考虑目标函数$g(x,y)=(x-1)^2+y^2$在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$条件下的极小值问题，并设条件极小值为$g_{\min}=1$，由此导出$a,b$之间的关系。构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}L_x=(x-1)-\frac{\lambda x}{a^2}=0,\\ \frac{1}{2}L_y=y-\frac{\lambda y}{b^2}=y(1-\frac{\lambda}{b^2})=0,\\ L_\lambda=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0,\end{cases}$$

并由此可得

$$g_{min}=(x-1)^2+y^2=\lambda\left(1-\frac{x}{a^2}\right)=1。$$

若$y=0$，则$x=a$。由$g_{min}=(x-1)^2+y^2=1$，可得$a=2$。在方程组$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$中消去$y$，得到$(1-\frac{b^2}{4})x^2-2x+b^2=0$，容易知道当$b<\sqrt{2}$时方程除了解$x_1=2$外另有一解$x_2\in(0,2)$，这说明椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$不完全包含圆$(x-1)^2+y^2=1$，不满足条件。所以$b\geq\sqrt{2}$，这时椭圆面积$S\geq2\sqrt{2}\pi$。

若$\lambda = b^2$，则$x = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2}$，代入$g_{min} = \lambda\left(1 - \dfrac{x}{a^2}\right) = 1$，得到$a, b$必须满足的关系式

$$a^2b^2 = a^2 + b^4。$$

现求目标函数$f(a,b) = \pi ab$在$a^2b^2 = a^2 + b^4$条件下的极小值。令

$$l(a,b,\lambda) = \pi ab - \lambda(a^2b^2 - a^2 - b^4)，$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} l_a = \pi b - 2\lambda a(b^2 - 1) = 0, \\ l_b = \pi a - 2\lambda b(a^2 - 2b^2) = 0, \end{cases}$$

消去λ，得到$a = \sqrt{2}b^2$，再代入关于a, b的约束条件$a^2b^2 = a^2 + b^4$，解得

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}，\quad b = \frac{\sqrt{6}}{2}，$$

这时椭圆面积$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$。由于$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi < 2\sqrt{2}\pi$，所以当$a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$包含圆$(x-1)^2 + y^2 = 1$，且面积最小。

12．设三角形ABC的三个顶点分别在三条光滑曲线$f(x,y) = 0$，$g(x,y) = 0$及$h(x,y) = 0$上。证明：若三角形ABC的面积取极大值，则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形ABC的垂心。

证　不妨固定一边BC于x轴上，A点在曲线$f(x,y) = 0$上移动，设$y = y(x)$是$f(x,y) = 0$所确定的隐函数，则$y(x)$就是三角形的高，当三角形ABC的面积取极大值时，$\dfrac{dy(x)}{dx} = 0$，即曲线$f(x,y) = 0$在A点的切线与对边BC平行，所以在A点的法线与BC边垂直。由于这是图形的几何性质，不依赖于坐标系，所以曲线$f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$与$h(x,y) = 0$在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边，从而在三个顶点处的法

线分别垂直于三角形的对边。

13．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个已知正数。求n元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k x_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le 1$$

下的最大值与最小值。

解　由于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$没有驻点，所以只需要求$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在约束条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$下的最大值与最小值。令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$L_{x_k}=a_k-2\lambda x_k=0,\quad k=1,\cdots,n\text{，}$$

所以

$$x_k=\frac{a_k}{2\lambda}=0,\quad k=1,\cdots,n\text{，}$$

代入约束条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，可得$2\lambda=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}}=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{，}$$

从而

$$f_{\max}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{，}\quad f_{\min}=-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\text{。}$$

14．求二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 = 1\right\}$ 上的最大值与最小值。

解 令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j-\lambda\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)\text{，}$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}L_{x_k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i-\lambda x_k=0, \quad k=1,\cdots,n,\\ L_\lambda=-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)=0,\end{cases}\text{，}$$

由

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k L_{x_k}=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k-\lambda\sum_{k=1}^{n} x_k^2=0\text{，}$$

可知

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=\lambda\text{，}$$

即目标函数的最大值和最小值包含在上面的方程组关于λ的解中。

记$\mathbf{A}=(a_{ij})$，由于方程组$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i-\lambda x_k=0, \quad (k=1,\cdots,n)$有非零解，所以系数行列式$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$，即$\lambda$是矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的特征值。由于$\mathbf{A}=(a_{ij})$是实对称阵，所以特征值都是实数，将它们按照大小排序为$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，则得到

$$f_{\max}=\lambda_n\text{，}\quad f_{\min}=\lambda_1\text{。}$$

15．设生产某种产品必须投入两种要素，x_1和x_2分别为两要素的投入量，Q为产出量。若生产函数为$Q=2x_1{}^{\alpha}x_2{}^{\beta}$，其中$\alpha,\beta$为正的常数，且

$\alpha+\beta=1$。假定两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小。

解　目标函数为 $f(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$，约束条件为 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$。令

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}-12),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_{x_1}=p_1-2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}=0, \\ L_{x_2}=p_2-2(1-\alpha)\lambda x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}=0, \end{cases}$$

消去 λ，得到 $x_2=\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}x_1$，代入约束条件 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$，可解得

$$x_1=\frac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}},\quad x_2=\frac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}。$$

由于 $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty}f(x_1,x_2)=+\infty$，所以目标函数的唯一驻点必是最小值点，即当 $x_1=\dfrac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}}$，$x_2=\dfrac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}$ 时投入总费用最小。