习　题　2.3　无穷大量

1. 按定义证明下述数列为无穷大量：

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$；　　(2) $\left\{\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ $(a>1)$；

(3) $\{n-\arctan n\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$。

证（1） $\forall G>0$，取 $N=[3G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>\dfrac{n}{3}>G$。

（2） $\forall G>0$，取 $N=[a^G]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\log_a n>G$。

（3） $\forall G>0$，取 $N=[G+\dfrac{\pi}{2}]$，当 $n>N$ 时，成立 $|n-\arctan n|>G$。

（4） $\forall G>0$，取 $N=[2G^2]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|>\frac{n}{\sqrt{2n}}>G\text{。}$$

2. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$(或 $-\infty$)，按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty(\text{或}-\infty);$$

(2) 设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，利用（1）证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0\text{。}$$

证（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists N_1>0,\forall n>N_1:a_n>3G$。对固定的 N_1，$\exists N>2N_1,\forall n>N:\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$，于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G\text{。}$$

同理可证当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 时，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=-\infty$。

（2） $\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$，可知

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=-\infty$，从而

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

3. 证明：

(1) 设{ x_n }是无穷大量，｜ y_n ｜ $\geq\delta>0$，则{ x_n y_n }是无穷大量；

(2) 设{ x_n }是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$，则{ x_n y_n }与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

证 （1）因为{ x_n }是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立$|x_n|>\dfrac{G}{\delta}$。于是$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$，所以{ x_n y_n }也是无穷大量。

（2）由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$，可知$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立$\dfrac{|b|}{2}\leq|y_n|\leq2|b|$。因为{ x_n }是无穷大量，所以$\forall G>0$，$\exists N''$，$\forall n>N''$，成立$|x_n|>\max\left\{\dfrac{2G}{|b|},2|b|G\right\}$。

取$N=\max\{N',N''\}$，$\forall n>N$，成立$|x_ny_n|>G$与$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|>G$，所以{ x_n y_n }与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量。

4. (1) 利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}；$$

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$。

解（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\dfrac{4}{3}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3[1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2]-4n^3}{3n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(2n+1)^2-4n^3+4(n-1)^3}{3n^2-3(n-1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{24n-1}{6n-3}=4$。

5. 利用 Stolz 定理，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$ （$a>1$）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ （$a>1$，k是正整数)。

证 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\log_a\dfrac{n}{n-1}=0$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k-(n-1)^k}{a^n-a^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}$，

其中$P_{k-1}(n)$为关于n的$k-1$次多项式；重复上述过程k次即得到

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2}=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k}=0$。

6. (1) 在 Stolz 定理中，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$的结论?

(2) 在 Stolz 定理中，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$不存在，能否得出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$不存在的结论?

解 （1）不能。考虑例子$x_n=(-1)^n n$，$y_n=n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty$， 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$极限不存在。

（2）不能。考虑例子$x_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n, y_n=n^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$极限不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$。

7. 设 0＜λ＜1，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0\right)=\frac{a}{1-\lambda}。$$

证 记$k=\lambda^{-1}$，则$a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0=\frac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$，利用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n}{k^{n-1}(k-1)}=\frac{a}{1-\lambda}。$$

8. 设$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,当$n\to\infty$时有极限。$\{p_n\}$为单调递增的正数数列，且

$p_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0\ 。$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，作代换$a_k=A_k-A_{k-1}$，得到

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n},$$

对上式求极限，在求后一分式的极限时应用 Stolz 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n}$$

$$=A-\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}=A-A=0。$$

习　题 2.4　收敛准则

1．　利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-1}\right]=\dfrac{1}{e}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=e$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$。

（5）当$n\ge 2$时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n。$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^n=e$与$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^n=e$。

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限：

(1) $x_1=\sqrt{2}\,,x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,,n=1,2,3,\cdots$；

(2) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$， $n=1,2,3,\cdots$；

(3) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{-1}{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(4) $x_1=1$， $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(5) $0<x_1<1$， $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(6) $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(2-x_n), n=1,2,3,\cdots$。

解 （1）首先有$0<x_1=\sqrt{2}<2$，设$0<x_k<2$，则$0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0<x_n<2$。由

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}},$$

可知数列$\{x_{n+1}-x_n\}$保持同号；再由$x_2-x_1>0$，可知$\forall n$，$x_{n+1}-x_n>0$，所以$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$两端求极限，得到方程$a=\sqrt{2+a}$，解此方程，得到$a=2$，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（2）首先有$0<x_1=\sqrt{2}<2$，设$0<x_k<2$，则$0<x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<2$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0<x_n<2$。由$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})>0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$两端求极限，得到方程$a=\sqrt{2a}$，解此方程，得到$a=2$（另一解$a=0$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

（3）首先有$x_1=\sqrt{2}>-1$，设$x_k>-1$，则$x_{k+1}=\dfrac{-1}{2+x_k}>-1$，由数学

归纳法可知$\forall n$，$x_n > -1$。由$x_{n+1} - x_n = \dfrac{-1}{2+x_n} - x_n = -\dfrac{(x_n+1)^2}{2+x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \dfrac{-1}{2+x_n}$两端求极限，得到方程$a = \dfrac{-1}{2+a}$，解此方程，得到$a=-1$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1。$$

（4）首先有$0 < x_1 = 1 < 4$，设$0 < x_k < 4$，则$0 < x_{k+1} = \sqrt{4+3x_k} < 4$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 4$。由$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 4 + 3x_n - x_n^2 = (4-x_n)(1+x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}$两端求极限，得到方程$a = \sqrt{4+3a}$，解此方程，得到$a=4$，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4。$$

（5）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = 1 - \sqrt{1-x_k} < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = 1 - x_n - \sqrt{1-x_n} < 0$，可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$两端求极限，得到方程$a = 1 - \sqrt{1-a}$，解此方程，得到$a = 0$（另一解$a=1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0。$$

（6）首先有$0 < x_1 < 1$，设$0 < x_k < 1$，则$0 < x_{k+1} = x_k(2-x_k) < 1$，由数学归纳法可知$\forall n$，$0 < x_n < 1$。由$x_{n+1} - x_n = x_n(2-x_n) - x_n = x_n(1-x_n) > 0$，可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，因此收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = x_n(2-x_n)$两端求极限，得到方程$a = a(2-a)$，解此方程，得到$a=1$（另一解$a=0$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1。$$

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a>1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$。

证 (1) 设 $x_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\frac{n+1}{2n+1}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2n+3} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3} x_n$ 两端求极限，得到 $a = \frac{1}{2}a$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1} = 0。$$

(2) 设 $x_n = \frac{a^n}{n!}$，则 $x_n > 0$，且当 $n > a$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < 1$，所以 $\{x_n\}$ 从某一项开始是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，对等式 $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$ 两端求极限，得到 $x = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0。$$

(3) 设 $x_n = \frac{n!}{n^n}$，则 $x_n > 0$，$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$，所以 $\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，因此收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_{n+1}$ 两端求极限，得到 $a = ea$，于是 $a = 0$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0。$$

4. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$，$n = 1,2,3,\cdots$，分 $x_1 = 1$ 与 $x_1 = -2$ 两种情况求

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 对$x_1=1$，易知$\forall n$，$x_n>0$，且当$n\ge 2$时，$x_n\ge\sqrt{2}$。由

$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\le 0$，可知数列$\{x_n\}$单调减少有下界，所以收敛。设

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对等式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$a=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{2}{a})$，解得

$a=\sqrt{2}$ （$a=-\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}。$$

对$x_1=-2$，易知$\forall n$，$x_n\le-\sqrt{2}$。由$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\ge 0$，可知数列$\{x_n\}$单调增加有上界，所以收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，对等式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$两端求极限，得到$b=\dfrac{1}{2}(b+\dfrac{2}{b})$，解得$b=-\sqrt{2}$ （$b=\sqrt{2}$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\sqrt{2}。$$

5. 设$x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ （$n=1,2,3,\cdots$），求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 首先利用递推公式$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，得到数列$\{x_{n+1}-x_n\}$的通项公式$x_{n+1}-x_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$。于是由

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k，$$

得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{a+2b}{3}。$$

6. 给定$0<a<b$，令$x_1=a, y_1=b$。

(1) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ （$n=1,2,3,\cdots$），

证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$。这个公共极限称

为a与b的算术几何平均；

(2) 若$x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$，$y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$（$n = 1,2,3,\cdots$），证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$。这个公共极限称为$a$与$b$的算术调和平均。

证 (1) 首先易知$\forall n$，有$x_n \le y_n$。由$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \ge 0$，$y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \le 0$，得到$a \le x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \le b$，即$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列，$\{y_n\}$是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，对$y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$的两端求极限，得到$x = y$。

（2）首先易知当$n \ge 2$时，有$x_n \ge y_n$。由$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(y_n - x_n) \le 0$，$y_{n+1} - y_n = \dfrac{y_n(x_n - y_n)}{x_n + y_n} \ge 0$，得到当$n \ge 2$时，

$\dfrac{2ab}{a+b} \le y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n \le \dfrac{a+b}{2}$，即$\{y_n\}$是单调增加有上界的数列，$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列，所以它们收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，对$x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$的两端求极限，得到$x = y$。

7. 设$x_1 = \sqrt{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$（$n = 1,2,3,\cdots$），证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解 当$0 < x_n < \sqrt{2} - 1$时，有$x_{n+1} > \sqrt{2} - 1$；当$x_n > \sqrt{2} - 1$时，有$0 < x_{n+1} < \sqrt{2} - 1$。

由于$x_1 = \sqrt{2} > \sqrt{2} - 1$，得到$\forall n$，$x_{2n+1} > \sqrt{2} - 1$，$0 < x_{2n} < \sqrt{2} - 1$。于是由

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{2 + x_{2n-1}}{5 + 2x_{2n-1}} - x_{2n-1} = \frac{-2(x_{2n-1} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n-1} + \sqrt{2} + 1)}{5 + x_{2n-1}} < 0,$$

$$x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{2 + x_{2n}}{5 + 2x_{2n}} - x_{2n} = \frac{-2(x_{2n} - \sqrt{2} + 1)(x_{2n} + \sqrt{2} + 1)}{5 + x_{2n}} > 0,$$

可知数列$\{x_{2n-1}\}$单调减少有下界，数列$\{x_{2n}\}$单调增加有上界，从而都收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$，对等式$x_{2n+1}=\dfrac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$与$x_{2n+2}=\dfrac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$两端求极限，得到方程$a=\dfrac{2+a}{5+2a}$与$b=\dfrac{2+b}{5+2b}$，解此两方程，得到解$a=\sqrt{2}-1$与$b=\sqrt{2}-1$（另两解$a=-\sqrt{2}-1$与$b=-\sqrt{2}-1$舍去），因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}-1。$$

8. 设 $\{x_n\}$ 是一单调数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充分必要条件是：存在 $\{x_n\}$ 的子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$。

证 必要性显然，现证充分性。不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$：$-\varepsilon<x_{n_k}-a\le 0$。 取$N=n_{K+1}$，$\forall n>N$，$\exists M>K+1$，使得$n_{K+1}<n<n_M$，于是$-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\le x_n-a\le x_{n_M}-a\le 0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

9. 若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$收敛于不同的极限，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}} = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}} = b$，$a\neq b$。

证 由于 $\{x_n\}$ 不收敛，所以$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists m>n>N$：$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

取$N_1=1$，$\exists m_1>n_1>N_1$：$|x_{m_1}-x_{n_1}|\ge\varepsilon_0$，

取$N_2=m_1$，$\exists m_2>n_2>N_2$：$|x_{m_2}-x_{n_2}|\ge\varepsilon_0$，

……,

取$N_k=m_{k-1}$，$\exists m_k>n_k>N_k$：$|x_{m_k}-x_{n_k}|\ge\varepsilon_0$，

…….

于是得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{x_{m_k}\}$，它们都是有界数列。

首先 $\{x_{n_k}\}$ 具有收敛子列 $\{x_{n_k'}\}$，由于对应的 $\{x_{m_k'}\}$ 也是有界数列，又具有收敛子列 $\{x_{m_k''}\}$。

记$\{n_k"\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k"\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，它们收敛于不同的极限。

10. 若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

证　由于数列$\{x_n\}$不是无穷大量，所以$\exists M>0$，使得数列$\{x_n\}$中有无穷多项满足$|x_n|\le M$，于是从中可以取出数列$\{x_n\}$的一个收敛子列$\{x_{m_k}\}$。又由于数列$\{x_n\}$无界，所以对$\forall G>0$，数列$\{x_n\}$中必有无穷多项满足$|x_n|>G$。

取$G_1=1$，则$\exists n_1$，使得$|x_{n_1}|>G_1$，

取$G_2=2$，则$\exists n_2>n_1$，使得$|x_{n_2}|>G_2$，

……,

取$G_k=k$，则$\exists n_k>n_{k-1}$，使得$|x_{n_k}|>G_k$，

…….

记$\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列。

11. 设S是非空有上界的数集，$\sup S = a \overline{\in} S$。证明在数集$S$中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证　由$\sup S = a \overline{\in} S$，可知$\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in S$，使得$a-\varepsilon<x<a$。

先取$\varepsilon_1=1$，则$\exists x_1\in S$，使得$a-\varepsilon_1<x_1<a$；对$\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2},a-x_1\}>0$，则$\exists x_2\in S$，使得$a-\varepsilon_2<x_2<a$，其中$x_1=a-(a-x_1)\le a-\varepsilon_2<x_2$；对$\varepsilon_3=\min\{\frac{1}{3},a-x_2\}>0$，则$\exists x_3\in S$，使得$a-\varepsilon_3<x_3<a$，其中$x_2=a-(a-x_2)\le a-\varepsilon_3<x_3$；……；对$\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\}>0$，则$\exists x_n\in S$，使得$a-\varepsilon_n<x_n<a$，其中$x_{n-1}=a-(a-x_{n-1})\le a-\varepsilon_n<x_n$；……。由此在数

集S中取到了严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

12. 设$\{(a_n, b_n)\}$是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$。

证明存在唯一的实数ξ属于所有的开区间(a_n, b_n)，且$\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

证 根据题意，$\{a_n\}$单调增加有上界，$\{b_n\}$单调减少有下界，因此都收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n + (b_n - a_n)] = \xi$。由于$\{a_n\}$严格单调增加，$\{b_n\}$严格单调减少，可知$\forall n$，有$a_n < \xi < b_n$，即$\xi$属于所有的开区间$(a_n, b_n)$。

若存在另一ξ'属于所有的开区间(a_n, b_n)，则由$a_n < \xi' < b_n$，利用极限的夹逼性，得到$\xi' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，即满足题意的$\xi$是唯一的。

13. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \quad (|q|<1, |a_k| \le M)$；

(2) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$。

证 （1） $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < \frac{M}{1-|q|})$，取$N = \left[\dfrac{\ln \dfrac{(1-|q|)}{M}\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$n > N$时，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q^k\right| \le M|q|^{n+1}(1 + |q| + |q|^2 + \cdots + |q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1} < \varepsilon。$$

（2） $\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n > N$时，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$。

14. (1) 设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1} - x_n| = 0$，问$\{x_n\}$是否一定是基本数列。

(2) 设数列{ x_n }满足条件｜ $x_{n+1}-x_n$ ｜＜$\frac{1}{2^n}$（$n=1,2,3,\cdots$）。证明{ x_n }是基本数列。

解（1）不一定。反例：$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$。

（2）$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，取$N=1+\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}}\right]$，$\forall m>n>N$，成立

$$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon\text{。}$$

15. 对于数列 $\{x_n\}$ 构造数集 A_k：

$$A_k=\{x_n \mid n\ge k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}\text{。}$$

记 $\operatorname{diam}A_k=\sup\{\,|x_n-x_m|，x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列{ x_n }收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0\text{。}$$

证 因为$\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$，成立 $\operatorname{diam}A_k<\varepsilon$。取 $N=K$，则$\forall m>n>N$，成立$|x_m-x_n|\le\operatorname{diam}A_{k+1}<\varepsilon$。

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛。

证 采用反证法。不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists m,n>N$：$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$。

取 $N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1:x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0;$

取$N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2:x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0;$

……

取$N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k:x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0;$

…….

于是 $x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty\ (k\to\infty)$，与数列$\{x_n\}$有界矛盾。